ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2003 අප්‍රේල්
සංයුක්ත ගණිතය II | පැය තුනයි

01)(a). බිම මත පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට u වේගයෙන් සිරස් ව උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබූ අංශුවක්, ගුරුත්ව බලයට පමණක් භාජනය වී චලනය වෙමින්, T කාලයකට පසුව නැවත O ට වැටෙයි. අංශුවේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරය පමණක් උපයෝගී කර ගනිමින් ,

i. අංශුවේ, උඩු අතට චලිතය සඳහා ගතවූ කාලයත් යටිඅත් චලිතය සඳහා ගත වූ කාලයත් එකම බව ද , $\frac{u}{g}$ ට සමාන බව ද

ii. අංශුව නැගී වැඩිතම උස $\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}$ බව ද

iii. t_1 සහ t_2 කාලවල දී අංශුව එකම උසකින් පිහිටියේ නම්, $t_1 + t_2 = T$ බව ද පෙන්වන්න.

(b). උතුරු දිශාවට ඒකාකාර v ප්‍රවේගයෙන් යාත්‍රා කරන A නැවකට , උතුරෙන් නැගෙනහිරට අංශක α කෝණයකින් යොමු වූ දිශාවෙන් තමා දෙසට එළඹෙන B කුඩා දුම් නැවක් දිස් වෙයි. එම මොහොතේම A නැවට , දකුනෙන් බටහිරට අංශක α කෝණයක් යොමු වූ දිශාවෙන් තමා දෙසට එළඹෙන වෙනත් C දුම් නැවක් ද දිස් වෙයි. B හා C එක් එක් නැව නිශ්චල ජලයේ u ඒකාකාර වේගයෙන් චලනය වන අතර B නැව දකුණෙන් බටහිරට අංශක $\emptyset$ කෝණයකින් සාදන දිශාවට ද, C නැව උතුරින් නැගෙනහිරට අංශක θ කෝණයක් සාදන දිශාවට ද, පදවනු ලැබේ. $0° < \theta < \alpha < \emptyset < 90°$ නම්, A හා B සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය ද, A හා C සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය ද එකම සටහනක ඇඳ එම රූප සටහන භාවිතයෙන්,

i. $\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{v}{\sin(\emptyset-\alpha)}$ බව ද,

ii. C ට සාපේක්ෂව B හි ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය $2\sqrt{u^2 - v^2 sin^2\alpha}$ බව ද පෙන්වන්න.

02)(a). බිමෙහි පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට, තිරසට $\alpha_1 \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වූ දිශාවට U ආරම්භක වේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ, P අංශුවක් ප්‍රක්ෂේපණය

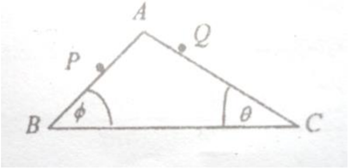
කෙරේ. O හි සිට d_1 සහ d_2 තිරස් දුරවල දී බිමට ඉහළින් $h\left(\leq \frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha_1\right)$ උසකින් P අංශුව තිබේ නම්,

$$d_1 + d_2 = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha_1 \text{ සහ } d_1\, d_2 = \frac{2hu^2}{g}cos^2\alpha_1$$ බව පෙන්වන්න.

O හි සිට $OA = \frac{u^2}{2g}\sin 2\alpha_1$ තිරස් දුරක් ගෙවා ගිය පසු අංශුව උපරිම උසකට ළඟාවන බව අපෝහනය කරන්න.

OA හරහා වූ සිරස් තලයේ තිරස සමග $\alpha_2\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් සාදන දිශාවට එකම u වේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ වෙනත් Q අංශුවක් O හි සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරණු ලැබේ. Q අංශුවද O හි සිට එකම OA තිරස් දුරකින් පිහිටි විට දී උපරිම උසකට ළඟාවූයේ නම්, $\alpha_1 + \alpha_2$ සොයන්න.

(b). රූප සටහනේ දැක්වෙන්නේ, තිරසට පිළිවෙලින් ϕ සහ θ $(sin2\phi > sin2\theta)$ කෝණ වලින් ආනත වූ AB හා AC සුමට මුහුනත් දෙකක් ස්කන්ධය M වූ කූඤ්ඤයක ABC සිරස් හරස්කඩකි. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් පිළිවෙලින් AB හා AC ඔස්සේ පහළට ලිස්සා යයි. කූඤ්ඤය සවිකොට ඇත්නම් p හි හා Q හි ත්වරණ සොයන්න. කූඤ්ඤය සුමට නම් හා සුමට අචල තලයක් මත එයට නිදහසේ චලනය විය හැකිනම් , තලයට සාපේක්ෂව කූඤ්ඤයේත් , අංශුවලත් ත්වරණය නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණ ලියන්න. ඤ්ඤය $\frac{mg\,(sin2\phi - sin2\theta)}{2[M + m(sin^2\theta + sin^2\phi)]}$ ත්වරණයකින් චලනය වන බව පෙන්වන්න. $\theta = \phi$ විට , කූඤ්ඤය ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් චලනය වන බව පෙන්වා , එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ P හා Q හි ත්වරණ සොයන්න.



03)(a). කුඩා අරයන්ගෙන් හා සම ස්කන්ධයන්ගෙන් යුත් P හා Q සුමට ගෝල දෙකක් පළල කුඩා වූද අරය a වූද සුමට තිරස් වෘත්තාකාර කට්ටයක පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයක තිබේ . t = 0 කාලයේදී P හා Q ගෝල පිළිවලින් u හා v වේග සහිතව ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට කට්ටය දිගේ සමගාමීව ප්‍රක්ෂේපණය කරණු ලැබේ . P හා Q ගෝල පිළිවලින් u_1 හා v_1 වේග සහිතව කට්ටය දිගේ චලනය වේ නම් ද ගෝල අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e (<1) නම් ද u_1 හා v_1නිර්ණය කිරීමට සමීකරණ ලියන්න. u > v නම්,

I. ගැටුමට පසු Q ගෝලය එහි මුල් ගමන් දිශාවට චලනය වන බවද ,

II. ගැටුමට පසු ගෝල දෙක ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ නම් $e > \frac{u-v}{u+v}$ බවද පෙන්වන්න.

III. ඉහත අවශ්‍යතාව සපුරයි නම් , $t = \frac{2\pi a(1+e)}{e(u+v)}$ විට P හා Q නැවත ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

(b). ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, දිග a වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. ආරම්භයේ දී, තන්තුව නොබුරුල්ව P නිසලව තිබිය දී l ආවේගයක් OP ට ලම්භ දිශාවකට P ට යොදනු ලැබේ. ඉන් පසුව සිදුවන චලිතයේ දී යටි අත් සිරස සමග θ කෝණයක් OP සාදන විට P හි ප්‍රවේගය v ද තන්තුවේ ආතතිය T ද නම්,

$v^2 = \frac{l^2}{m^2} - 2ga + 2ga\cos\theta$ සහ $T = \frac{l^2}{ma} - 2mg + 3mg\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

i. අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යයි නම් , $l > m\sqrt{5ag}$ බව ද,
ii. OP රේඛාව උඩු සිරස සමග α සුළු කෝණයක් සාදන විට අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙන් ඉවත් වේ නම්,

$m\sqrt{2ag} < l < m\sqrt{5ga}$ සහ $\cos\alpha = \frac{l^2}{3m^2ga} - \frac{2}{3}$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

04). ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් , ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය $4mg$ ද වූ AB ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක A කෙළවරට ගැට ගසා ඇති අතර B කෙළෙවර බිමෙහි සිට $2l$ ට වැඩි උසකින් පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍යයක ගැට ගසා ඇත. P අංශුව B හි නිසලව තබා මුදා හරිනු ලැබේ.
ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

i. තන්තුවේ උපරිම දිග $2l$ බව පෙන්වා,
ii. තන්තුව යන්තමින් ඇදී ඇති විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

$x(> l)$ යනු t කාලයේදී තන්තුවේ දිග යැයි ගනිමු. P හි $\dot{x}$ ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණයක් ලියන්න.
එම සමීකරණයෙන්, $\ddot{y} + \frac{4g}{l}y = 0\,; y \geq -\frac{l}{4}$ ආකාරයේ සමීකරණයක් ලැබෙන බව පෙන්වන්න; මෙහි $y = x - \frac{5l}{4}$

y සඳහා , $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පණය කරමින් , A, B, ω නියත සොයන්න. ඒ නයින්,

iii. y හි උපරිම අගය නිර්ණය කර එමගින් තන්තුවේ උපරිම දිග ලබාගන්න.
iv. P හි වැඩිතම වේගය සොයන්න.

05)(a). $ABCDEF$ යනු පැත්තක දිග මීටර 2 ක් වූ සවිධි ෂඩස්‍රයකි. AB, BC, CD, DE සහ EF පාද ඔස්සේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරන, විශාලත්ව පිළිවෙලින් නිව්ටන් 4,3,2,5 සහ 6 වූ බල ක්‍රියාකරයි. තව ද, FC සමග θ කෝණයක් සාදන දිශාවකට විශාලත්වය නිව්ටන් p වූ වෙනත් P බලයක් ද ෂඩාස්‍රයේ තලය මත F හි දී ක්‍රියා කරයි.

i. ඉහත බල පද්ධතිය යුග්මයකට පමණක් ඌණනය වේ නම්, p සහ θ නිර්ණය කර යුග්මයේ විශාලත්වය සොයන්න.

ii. P බලය AF ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි නම් සහ $p = 7$ නම්, පද්ධතිය තනි බලයකට ඌණනය වන බව පෙන්වා එහි ක්‍රියා රේඛාව (අවශ්‍ය නම් දික්කරන ලද) AB සමග ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

(b). අරය a වන සුමට තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් එහි ගැටිය තිරස් ව සහ ඉහළින්ම පිහිටින පරිදි සවිකොට ඇත. බර W සහ දිග $2l(> 2a)$ වන සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර පාත්‍රයේ ඇතුළත පෘෂ්ඨයේ පිහිටින පරිදි දණ්ඩේ C ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ගැටිය මත ගැටෙමින් නිසලව ඇත. දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල සටහන් කරන්න.

A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන් C හි දී R ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{Wl}{2a}$ බව පෙන්වන්න.

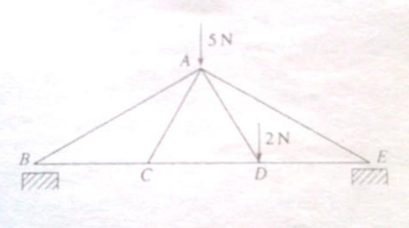
තව ද, R සහ W අතර තවත් සම්බන්ධතාවක් ලබා ගන්න.

ඒ නයින් , CB හි දිග $\frac{1}{4}\left(7l - \sqrt{l^2 + 32a^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

06)(a). එක එකක බර W වූ සමාන ඒකාකාර දඬු පහක් , $ABCDE$ සවිධි පංචාස්‍රයක් සෑදෙන පරිදි, ඒවායේ කෙළෙවර වලදී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. CD තිරස් තලයක නිසලව තිබෙන පරිදි පංචාස්‍රය සිරස් තලයක තබා ඇති අතර සවිධි පංචාස්‍ර හැඩය පවත්වාගනු ලබන්නේ BC හා DE දඬු වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යා කරන සැහැල්ලු දණ්ඩක් මඟිනි. AB සහ BC දඬු මත ක්‍රියාකරන බල දක්වන්න.

තව ද , සැහැල්ලු දණ්ඩේ ආතතිය $\left(cot\,\frac{\pi}{5} + 3cot\,\frac{2\pi}{5}\right)W$ බව ඔප්පු කරන්න.

(b). රූපයේ දැක්වෙන AB හා AE හැර අනෙක් සියලු ම දඬු දිගින් සමාන වන AB, AC, AD, AE, BC, CD සහ DE සැහැල්ලු දඬු හතකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලකි.එක්ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි B හා E හි ඇති ආධාරක දෙකක් සමග රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පවතී. A හා D සන්ධිවල පිළිවෙලින් නිව්ටන් 5 හා 2 ක ක භාර දෙකක් ඇත. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක්



ඇඳ AB හා AE දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර එක එකක් ආතතියක් ද තෙරපුමක් ද යන වග දක්වන්න.

07). ABC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරය G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, ත්‍රිකෝණයේ මාධ්‍යස්ථයන් හි ඡේධන ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටින බව පෙන්වන්න.

A, B හා C හි පිහිටි සමාන ස්කන්ධ සහිත අංශු තුනක් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමග G සමපාත වන බව ද පෙන්වන්න.
ABC ත්‍රිකෝණාකාර, ඒකාකාර ආස්තරයක C කෝණය මහා කෝණයක් වේ. එම ආස්තරය, AC පාදය තිරස් මේසයක ගැටෙමින් සිරස් තලයක පවතී. ආස්තරය නොපෙරෙලෙන පරිදි Bශීර්ෂයෙන් එල්ලිය හැකි විශාලතම බර $\frac{1}{3}W\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි W යනු ආස්තරයේ බර වන අතර a, b, c සුපුරුදු අර්ථ ගනී.

08)(a). A සහ B යනු සසම්භාවී සිදිධීන් දෙකක් නම් A සහ B හි ස්වායත්තතාව අර්ථ දක්වන්න. A, B හා $A \cap B$ සිද්ධීන්වල සම්භාවිතා ඇසුරෙන්, සම්මත අංකනයට අනුව, $P(A \cup B)$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් දෙන්න.
X සසම්භාවී විචල්‍යය සමාන සම්භාවීතා සහිතව 0 හා 1 අගයන් පමණක් ගනී. Y යනු සමාන සම්භාවීතාව සහිත ව 0 හා 1 අගයන් පමණක් ගන්නා තවත් සසම්භාවී විචල්‍යයකි.
A සහ B යනු සසම්භාවී සිද්ධීන් දෙක පහත සඳහන් පරිදි අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු.

$A : X = 0$ හා $\overline{A} : X = 1$

සහ $B : Y = 0$ හා $\overline{B} : Y = 1$

$U = X + Y$ යැයි ගනිමු. U විසින් $0,1,2$ අගයයන් ගන්නා බව පෙන්වා. $U = 0,1,2$ සිද්ධීන් $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
A සහ B ස්වායත්ත ලෙස ගනිමින්.

i. $P(U = r);\ r = 0,1,2$ සොයන්න.
ii. $V = XY$ නම්, V හි අනුරූප සම්භාවීතා සොයන්න.

(b). X නමැති යම් රෝගයක් සඳහා A සහ B රෝග ලක්ෂණවලින් එකක් පමණක් පවතී.
සම්මත අංකනයට අනුව, $P(X|A) = 0.2$ හා $P(X|B) = 0.8$ බව දනී.
එක්තරා සංගහනයක 40% ක් සඳහා A රෝග ලක්ෂණය ද ඉතිරි 60% සඳහා B රෝග ලක්ෂණද පවතී. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් පුද්ගලයෙකුට 2003 තිබීමේ සම්භාවීතාව ගණනය කරන්න.
තව ද , රෝගියෙකු X රෝගයෙන් පෙළෙන බව දී ඇත්නම් ඔහු B රෝග ලක්ෂණය පෙන්නුම් කිරීමේ සම්භාවීතාව $\frac{6}{7}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.
X රෝගය තිබීමෙන් B රෝග ලක්ෂණය පෙන්වීමේ සම්භාවීතාව අඩු වූ ඇත් ද? නැතහොත් වැඩි වී ඇත් ද? හේතු දක්වන්න.

09). අමු දත්ත කුලකයක මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය අර්ථ දක්වන්න.
$x_1, x_2, \dots x_n$; $N \geq 2$ නම් වූ අමු දත්ත කුලකයක
$S^2 = \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right\}$
විචලතාවය සලකන්න. x_i නමැති i වැනි නිරීක්ෂණයෙහි $\bar{x}$ වලින් පවතින අපගමනය වන d_i, $d_i = x_i - \bar{x}$ $i = 1,2, \dots N$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත.
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = S^2$ බව පෙන්වන්න.

එක්තරා බැංකුවක සේවය කරන කාන්තාවන් පස්දෙනෙකුගේ වයස අවුරුදුවලින් x_1, x_2, x_3, x_4 හා x_5 වේ. බාල ම කාන්තාව හැරුණු කොට අන් එක් එක් කාන්තාව තමාගේ වයස හෙළි කිරීමට මැලි විය. එහෙත් මෙම පස් දෙනාගේම වයස්වල මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙලින් අවුරුදු 35 හා 36 බව, අවුරුදු 31 වයසැති බාලම කාන්තාව හෙළි කරයි. මාතය , මධ්‍යස්ථය ට සමාන නොවේ නම් ඉහත දී ඇති අවශ්‍යතා සපුරාලන වයස් හි අගය කුලක දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.

වයස් වල විචලතාව වන S^2, 5.2 බව තවදුරටත් හෙළි කලේ නම්, $d_i = x_i - \bar{x}$ $i = 1,2, \dots 5$ අගයන්ගෙන් S^2 ගණනය කරේ නම් ඉහත වයස් කුලක දෙකෙන් නිවැරෙදි වයස් දෙනු ලබන්නෙ කුමන කුලකයෙන් දැයි නීර්ණය කරන්න.

තව ද , වයස්වල කුටිකතා සංගුණකය ගණනය කරන්න.

ඔවුන්ගේ සේවයෙන් විශ්‍රම යන වයස අවුරුදු 55 වන අතර $y_i = 55 - x_i$; $i = 1,2, \dots 5$ යනු අවුරුදු වලින් ඉතිරි සේවා කාල යැයි ගනිමු.

සම්මත අංකනයට අනුව , $\bar{y} = 55 - \bar{x}$ බව පෙන්වන්න.

$\bar{y}$ වලින් y_i සඳහා පවතින අපගමනය $-d_i$; $i = 1,2, \dots 5$ ට සමාන බව ද පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ වයසෙහි විචලතාවයත්, ඉතිරි සේවා කාලයේ විචලතාවයත් සමාන බව පෙන්වන්න.තව ද, ඉතිරි සේවාකාලවල කුටිකතා සංගුණකයෙහි අගය ලියන්න.