ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

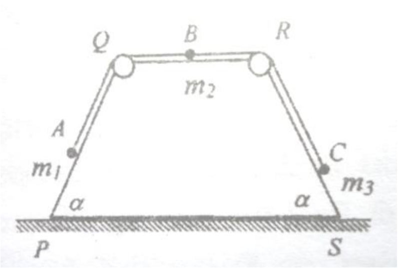
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2004 අප්‍රේල්

සංයුක්ත ගණිතය II	පැය තුනයි

01)(a). බිම සිට h උසකින් $\sqrt{2}gT$ වේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙන අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ චලනය වෙයි; මෙහි T යනු නියතයකි.
අංශුවේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සහ සිරස් සංරචක සඳහා වෙන වෙනම වේග-කාල ප්‍රස්තාර අඳින්න.
අංශුව බිම පතිත වන විට එය ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{3}{2}gT^2$ දුරකින් වෙයි නම්, වේග කාල ප්‍රස්තාර යොදා ගනිමින්, අංශුව බිමට ළඟාවීමට ගන්නා කාලය T බව හා $h = \frac{1}{2}gT^2$ බව පෙන්වන්න.

(b). පළල w වූ මෝටර් කාරයක් ඍජු පාරක් දිගේ පදික වේදිකාවේ ගැවී නොගැවී එයට සමාන්තරව ඒකාකාරව චලනය වෙයි. කාරයට l දුරක් ඉදිරියෙන් පදික වේදිකාව අයිනේ වූ පයින් යන මගියෙක් පාර හරහා යාම සඳහා ඒකාකාරව ගමන් කිරීමට පටන් ගනියි. පාරට සාපේක්ෂව , කාරයේ වේගය v සහ මගියාගේ වේගය u නම්, $u > v\sin\alpha$ නම්, වෙතොත් මගියාට කාරය ඉදිරියෙන් ආරක්ෂාකාරීව පාර හරහා මාරු විය හැකි බව පෙන්වන්න.; මෙහි $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{w}{l}\right)$.
$u = v\sin\alpha$ නම්, පාරට සාපේක්ෂව කාරයේ චලිතයේ දිශාව සමග $\frac{\pi}{2} - \alpha$ කෝණයක් සාදන දිශාවක් දිගේ පාරට සාපේක්ෂව ඇවිදීමෙන් මගියාට යන්තමින් කාරයට ඉදිරියෙන් පාර හරහා මාරු විය හැකි බව පෙන්වන්න

02). රූප සටහනේ ස්කන්ධය M වූ සුමට කොටයක සිරස් හරස්කඩක දැක්වෙයි. මෙහි QR හා PS තිරස් වන අතර PQ හා RS තිරසට α කෝණයකින් ආනත වේ.සුමට ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් Q හා R වූ සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් උඩින් යයි. තන්තුවේ කෙළවර වලට ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m_1 හා m_3 වූ A හා C හි කුඩා සුමට අංශු දෙකක් ඈඳා ඇත . කොටයට සුමට තිරස් තලයක නිදහසේ චලනය විය හැකිය. තලයට සාපේක්ෂව කොටයේ ත්වරණය , කොටයට සාපේක්ෂව අංශු වල ත්වරණය සහ තන්තුවේ AB හා BC කොටස් වල ආතතිය නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණ ලියා දක්වන්න. B අංශුවේ ස්කන්ධය නොගැනිය හැකි නම් තන්තුවේ AB හා BC කොටස් දෙකෙහි ආතති එකම බව පෙන්වන්න.වැඩි දුරටත් කොටයේ ස්කන්ධය නොගැනිය හැකිනම් A හා C මත කොටයේ ප්‍රතික්‍රියාවන්හි විශාලත්වය එක එකක් $\frac{2m_1m_3g\cos\alpha}{m_1+m_3}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.



03)(a). අංශුවක් පොළොවේ පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයකින්, ගුරුත්වය යටතේ තිරසට α කෝණයකින් u වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි. ඒ මොහොතේ ම , O හි සිට d ලම්බ දුරකින් වූ ද අංශුවෙහි සිරස් චලිත තලයට ලම්බ වූ ද සිරස් පැලැලක් අංශුවෙන් ඉවතට තිරස් දිශාවක් අතට ඒකාකාරව v වේගයකින් චලනය වීමට සැලැස්වෙයි. අංශුව පොළොවේ සිට h උසක දී පැලැල්ල හා ගැටෙයි නම්

$u\cos\alpha > v$ හා $gd^2 - 2u\sin\alpha\,(u\cos\alpha - v)d + 2h(u\cos\alpha - v)^2 = 0$

බව පෙන්වන්න.

$d > \frac{2u}{g}\sin\alpha\,(u\cos\alpha - v)$ නම්, අංශුව පැලැල්ල හා ගැටිය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(b). ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P අංශුවකට, සිරස් තලයක අචලව ඇති අරය r හා කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර බටයක් තුළ ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය විය හැකි ය. අංශුව බටයේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{3gr}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙයි.

අංශුව චලිතය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යොදා ගත හැකි දැයි පැහැදිලි කරන්න. OP යටිඅත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ වේගය v නම්, $v^2 = gr(1 + 2\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් , අංශුව මත බටයේ ප්‍රතික්‍රියාව $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ විට එහි දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වා. ඒ ලක්ෂ්‍යයේ දී අංශුවේ වේගය සොයන්න.

04)(a). කුඩා සුමට A අංශුවක් හා ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට ප්‍රත්‍යාස්ථ B අංශුවක් දිග l වූ අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවරට ගැටගසා ඇති අතර සුමට තිරස් තලයක නිසලව ඇත . දැන් පධතිය , තන්තුව නුබුරුල්ව AB දිශාව දිගේ u වේගයෙන් චලනය වේ නම් යම් කාලයකට පසුව B අංශුව තලය මත නිසලව ඇති ස්කන්ධය M වූ සුමට ප්‍රත්‍යාස්ථ C අංශුව සමඟ ගැටේ .B හා C අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් ,C අංශුව සමඟ ගැටීමෙන් පසුව B අංශුවට $\frac{m-eM}{m+M}$ u වේගයෙන් චලනය වෙන බව පෙන්වා B හා C අතර ගැටුමෙන් $\frac{(m+M)l}{M(1+e)u}$ කාලයකට පසුව A අංශුව B සමඟ ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

(b). ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට මුදුවක් තුලින් යන ස්වාභාවික දිග l වූ ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් එක් කෙළෙවරක් සීලිමක වූ O ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. මුදුව O හි නිසලව රඳවා තිබියදී තන්තුවේ අනෙත් කෙළෙවරට ඈඳා ඇති ස්කන්ධය M වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවෙන් එල්ලී ඇත. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2\,Mg$ නම් සමතුලිත පිහිටීමේ දී තන්තුවේ විතතිය $\frac{l}{2}$ බව පෙන්වන්න.

දැන් O හි දී නිශ්චලතාවෙන් මුදනු ලැබූ මුදුව තන්තුව දිගේ ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව යටි අතට සර්පණය වී P සමඟ ගැටී හාවෙයි. මුදුවෙන් හා අංශුවෙන් සමන්විත වූ සංයුක්ත වස්තුව $\frac{m}{M+m}\sqrt{3gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ව යටි අතට චලනය වීම අරඹන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ විතතිය x විට , සංයුක්ත වස්තුව සඳහා චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. සංයුක්ත වස්තුව $\sqrt{\frac{2Mg}{(M+m)l}}$ සංඛ්‍යාතය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

05)(a). දිග 1 m වන $ABCD$ චතුරස්‍රයක AB, CB, CD හා AD දිගේ අකුරු පටිපාටියෙන් දැක්වෙන දිශා අතට පිළිවෙළින් නිව්ටන් 5,6,1 හා 2 විශාලත්වයෙන් වූ බල ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය, දිශාව සහ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

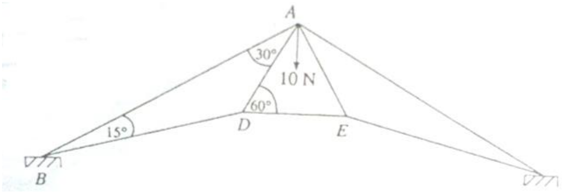
BD දිගේ B සිට D දිශාව අතට ක්‍රියාකරන විශාලත්වය නිව්ටන් $4\sqrt{2}$ වන තවත් බලයක් පද්ධතියට එකතු කෙරේ. පද්ධතිය විශාලත්වය $1\,Nm$ වූ යුග්මයකට ඌණනය වන බව පෙන්වන්න.

(b). ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය අඩියේ සිට b දුරකින් වූ ඉනිමගක් තිරස් රළු පොළොවක නැගී සිටිමින්, පොළොවට අචල ලෙස සවිකර ඇති අරය r වූ රළු සිලින්ඩරාකාර පයිප්පයකට හේත්තු වී සමතුලිතතාවයේ පවතී. ඉනිමග පයිප්පය සමග ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයෙන් ඔබ්බට ප්‍රක්ෂේප වන අතර පයිප්පයේ අක්ෂයට ලම්බ වේ. සර්ෂණය ක්‍රියා ලක්ෂ්‍ය දෙකේ ම සර්ෂණ කෝණය λ යැයි ද තිරසට ඉනිමගේ ආනතිය $2\alpha\ (b > r\cot\alpha)$ යයි ද ගනිමු. ඉනිමග අඩියේ සිට ඉනිමග දිගේ මැනෙන x දුරකින් වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ඉනිමගේ බරට සමාන බරක් ඇති භාරයක් එල්ලා ඇත.

සර්ෂණය ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍යය දෙකෙහිම ඉනිමග සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතී. $(b + x)\ sin^2\alpha\ cos2\alpha = r\ sin\lambda\ cos\lambda$ බව පෙන්වන්න.

06)(a). AB, BC හා CD යනු B හා C හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති සමාන බරින් හා දිගින් යුත් ඒකාකාර දඬු 3 ක් වෙයි. A හා D කෙළෙවරවල් එකම මට්ටමක වූ අචල සුමට තිරස් කූරු දෙකකට අසව් කර ඇත. පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ එල්ලී ඇත. AB හා CD තිරසට එකම α කෝණයකින් ආනත වේ නම් හා β යනු A හි දී AB මත ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරසට ආනතිය නම්, $\tan\alpha = \frac{2}{3}\tan\beta$ බව පෙන්වන්න.

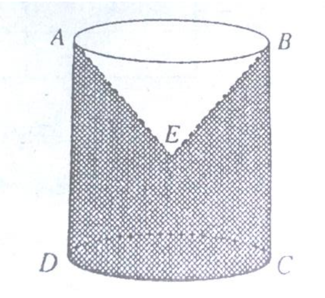
(b).



රූප සටහනේ පෙන්වා ඇති සැහැල්ලු රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක පිහිටන අතර A ඔස්සේ යන් සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ. එකම තිරස් මට්ටමේ ඇති B හා C හි වූ ආධාරක මත රාමු සැකිල්ල් සමතුලිතතාවේ පිහිටයි. $D\hat{B}A, D\hat{A}B$ හා $A\hat{D}E$ කෝණ පිළිවෙලින් $15°, 30°$ හා $60°$ වෙයි. A ලක්ෂ්‍යයෙන් $10N$ ක භාරයක් එල්ලා ඇත්නම්, බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ ඒ නයින් CE දණ්ඩට විශාලත්වය $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ cosec\ 15°\ N$ වූ ආතතියක් ඇති බව පෙන්වන්න. අනෙක් දඬු එක එකක ප්‍රත්‍යාබලය , එය ආතතියක් හෝ තෙරපුමක් දැයි දක්වමින්, නිර්ණය කරන්න.

07).

උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් , එහි අක්ෂය මත වන බව පෙන්වන්න.



රූප සටහනෙන්, උස H හා ආධාරක අරය R වූ $ABCD$ ඒකාකාර ඝණ ඍජු වෘත්තාකාර EAB කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් පසුව ඉතිරි කොටස දැක්වෙයි. එසේ හැරීමෙන් ලැබෙන S

වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න.

ඒ නයින් , S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇත්නම් එවිට $h = (2-\sqrt{2})H$ බව පෙන්වන්න.

S වස්තුව තිරස සමග $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන රළු තලයක් මත, DC ආධාරකය තලය මත වන පරිදි තබා ඇත. S ලිස්සීමෙන් වැළැක්වීමට තරම් තලය රළු වෙයි. S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් $R > (\sqrt{2}-1)H\tan\alpha$ නම් S ඇද නොවැටෙන බව පෙන්වන්න.

08)(a). සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව P_1 වේ. දෝෂ සහිත අයිතමයක දෝෂයක් ඇති බව අනාවරණය කර ගැනීමේ සම්භාවිතාව P_2 වේ. සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද අයිතමයක දෝෂයක් ඇති බව අනාවරණය කර ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. එවැනි අයිතම තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද්දේ යැයි සිතමු.

i. අයිතම තුන අතරේ දෝෂ කිසිවක් අනාවරණය නොවීමේ,
ii. අයිතම දෙකක දෝෂයන් අනාවරණය කර ගැනීමේ,
iii. අඩු වශයෙන් අයිතම දෙකකවත් දෝෂයක් අනාවරණය කර ගැනීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b). X හා Y අනාවැකි පළකරන්නන් දෙදෙනෙකු එකිනෙකට ස්වායක්ත ලෙස කාලගුණය පුරෝකථනය කරති. X අනාවැකි පළ කරන්නා කාළගුණය නිවැරෙදි ලෙස පුරෝකථනය කිරීමේ සම්භාවිතාව α ද , Y හි එම අගය β ද වෙයි. දෙන ලද දවසක් සඳහා X යහපත් කාළගුණයක් පුරෝකථනය කළ අතර , Y අයහපත් කාළගුණයක් පුරෝකථනය කළේය. X නිවැරෙදි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09)(a). එක්තරා කර්මාන්ත ශාලාවක සේවකයින් 100 කගේ මාසික වේතනය පිළිඹඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දී ඇත.

මාසික වේතනය (රුපියල්)	සේවකයින් ගණන
6 000	35
10 000	30
15 000	25
20 000	10

මෙම වේතන ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න.

සේවකයින් හතර දෙනෙකු අතිකාල වැඩෙහි යෙදෙන්නේ නම් හා එක එකෙකු ඔහුගේ මාසික වේතනය රුපියල් 3750 කින් වැඩි කරගනු ලැබේ නම් මෙම අගයන්ගෙන් කවරක් වෙනස් වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(b). මිනිසුන් 200 ක ගේ බර ආසන්න kg ට මනිනු ලැබ ඇත. ලබාගත් ප්‍රතිඵල පහත වගුවේ පෙන්වා ඇත.

බර (kg)	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94	95-100
සඛ්‍යාතය	24	50	58	35	21	12

i. මාත පන්තිය හඳුනාගෙන ව්‍යාප්තියේ මාතය අගණනය කරන්න.
ii. මධ්‍යස්ථ පන්තිය හඳුනාගෙන ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය ආගණනය කරන්න.
iii. ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යනාය්‍ය හා සම්මත අපගමනය අගයන්න.