ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2005 අප්‍රේල්

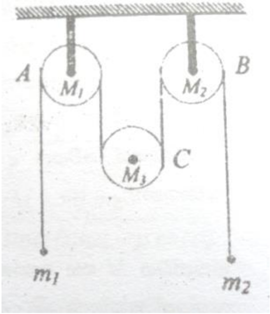
සංයුක්ත ගණිතය II | පැය තුනයි

01)(a). පොළොවේ සිට h උසකින් , $t = 0$ කාලයේ දී , නිසලතාවයෙන් අතහරිනු ලබන A නම් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ව වැටෙයි. ඒ මොහොතේ අංශුවක් පොළොවේ ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයකින් සිරස් ව උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ . එක් එක් අංශුවෙහි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර එකම රූප සටහනෙහි අඳින්න.

ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\frac{h}{u}$ කාලයේ දී අංශු දෙකම පොළොවෙහි සිට එකම උසකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

(b). නැවක නැගෙනහිර දිශාවට සහ උතුරු දිශාවට පිළිවෙලින් ජලයට සාපේක්ෂ ව u හා v සංරචක සහිත ව ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් යාත්‍රා කරයි. නැව, සබ්මැරීනට d දුරක් උතුරින් ඇති විට, නැව විනාශ කිරීමේ අරමුනින් ටෝර්පිඩෝවක් , සබ්මැරීනයෙන් පත්තු කරයි. එය ජලයට සාපේක්ෂව w ප්‍රවේගයකින් ඒකාකාරව චලනය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, ටොර්පිඩෝව නැව සමග ගැටෙයි නම්, එවිට $w > u$ බව පෙන්වා, ටොර්පිඩෝව සබ්මැරීනයේ සිට නැව වෙතට චලනය වීමට ගන්නා කාලය සොයන්න.

02)(a). ස්කන්ධ පිළිවෙලින් M_1හා M_2 වූ A හා B සුමට කප්පි දෙකක් සිරස් ලුහු අඬු දෙකක් මඟින් සිවිලිමකට සවිකර ඇත . රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් A , B හා ස්කන්ධය M_3 වූ චලනය විය හැකි සුමට කප්පියක් වටා යන අතර , තන්තුවෙහි දෙකෙලවරට m_1 හා m_2 ස්කන්ධ සහිත අංශු දෙකක් ඇඳා ඇත . තන්තුවෙහි කප්පිය සමඟ ස්පර්ශ නොවන කොටස් සිරස් වෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{4m_1m_2M_3g}{4m_1m_2+M_3(m_1+m_2)}$ බව පෙන්වා , පද්ධතිය මගින් සිවිලිම මත ඇති කරන බලය සොයන්න.



(b). ස්කන්ධය m වූ p අංශුවක් , ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් o අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. තන්තුව නොබුරුල් ව හා යටිඅත් සිරස් සමග $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන අයුරින් අංශුව රඳවා ඇතිවිට , අංශුව OP ඔස්සේ යන සිරස් තලයෙහි, තන්තුවට ලම්බ ව u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ . අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙහි යෙදෙන බව උපකල්පනය කරමින් , OP යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ පිහිටුම සැලකීමෙන් අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

$ga(3+2\cos\alpha)>u^2>2ga\cos\alpha$ වෙතොත් යටි අත් සිරස සමඟ OP, $cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha-\frac{u^2}{2g}\right)\right]$ කෝණයක් සාදන තෙක් අංශුව වෘත්තාකාර චාපයක් සලකුණු කරන බවත්, අනතුරුව ගුරුත්වය යටතේ නිදහස් ව චලනය වීමට ආරම්භ වන බවත් පෙන්වන්න.

03). A හා B යනු පොළොවේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යය දෙකකි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් AB තිරස් රේඛාව ඔස්සේ යන සිරස් තලයේ AB ට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වන අයුරින් $u(>0)$ ප්‍රවේගයෙන් A ලක්ෂ්‍යයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි . ස්කන්ධය λm වූ දෙවැනි Q අංශුවක් එම සිරස් තලයේම BA ට $\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වන අයුරින් B ලක්ෂ්‍යයෙ සිට $v(>u)$ ප්‍රවේගයෙන් සමගාමී ව ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි. අංශු දෙක උඩු ගුවනේ දී ගැටෙයි නම්, $u\sin\alpha=v\sin\beta$ බව හා අංශු ගැටෙන තුරු ඒවායේ සිරස් ප්‍රවේග සංරචක සමාන ව පවතින බව පෙන්වන්න. ගැටුමට ක්ෂණයකට පෙර p අංශුව තිරස් ව චලනය වන්නේ නම්, ඒ මොහොතේ Q අංශුව ද තිරස් ව චලනය වන බව අපෝහනය කරන්න.

තවදුරටත් A හා B ලක්ෂ්‍ය අතර දුර $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ වෙයි නම් සහ ගැටුමෙන් පසුව අංශු බද්ධ වෙයි නම්,

i. $u\cos\alpha=v\cos\beta$ බව
ii. සංයුක්ත වස්තුව $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)u\cos\alpha$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස් ව චලනය වීමට ආරම්භ වන බව හා
iii. සංයුක්ත අංශුව A සිට $\frac{u^2\sin 2\alpha}{(1+\lambda)g}$ දුරක දී පොළොවට වටෙන බව

පෙන්වන්න.

Q අංශුවෙහි ස්කන්ධය සමග සැසඳීමේ දී P හි ස්කන්ධය ගැනිය නොහැකි නම්, සංයුක්ත අංශුව B දී පොළොවට වටෙන බවත්, අනෙක් අතට P අංශුවේ ස්කන්ධය Q අංශුවේ ස්කන්ධය සමග සැසඳීමේදී ගැනිය නොහැකි නම් , සංයුක්ත අංශුව A දී පොළොවට වටෙන බවත් පෙන්වන්න.

P හා Q අංශු වල ස්කන්ධය සමාන නම් සංයුක්ත අංශුව පොළොවට වැටෙන්නේ කිනම් ලක්ෂයයක දී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

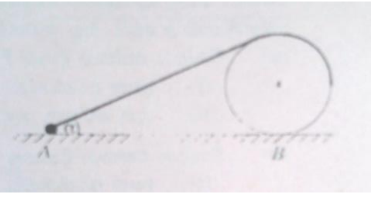
04)(a). ස්කන්ධය $M\,kg$ වූ ලොරියක් එන්ජිම $H\,kW$ ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරස් පාරක ධාවනය වන විට එහි උපරිම වේගය $u\,ms^{-1}$ වෙයි. එන්ජිම එම ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරමින් තිරසට ආනතිය α වූ පාරක ඉහළට ධාවනය වන විට ලොරියේ උපරිම වේගය $v\,ms^{-1}$ වෙයි. ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී නම් H හි අගය සොයන්න.

(b). ස්වාභාවික දිග l වූ ලුහු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළෙවරින් ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සමතුලිත ව එල්ලෙයි. සිරස් සමතුලිත පිහිටීමෙහි තන්තුවේ විතතිය c වෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය සොයන්න.
P අංශුව සමතුලිතතාවේ තිබෙන විට , සමාන ස්කන්ධයක් ඇති වෙනත් Q අංශුවක් P ට සිරස් ව ඉහළින් c උසක සිට නිසලව තිබී වැටී P සමග ගැටී බද්ධ වේ. ගැටුමට පසු t කාලයේ දී තන්තුවේ x විතතිය. $\ddot{x}+\omega^2(x-2c)=0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\omega^2=\frac{g}{2c}$ වෙයි.
$x=2c+a\cos\omega t+b\sin\omega t$ වන පරිදි a හා b නියත සොයන්න.
ඒ නයින් , සංයුක්ත අංශුව ගැටුමෙන් $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{2c}{g}}$ කාලයකට පසුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා , මෙම මොහොතේ තන්තුවේ විතතිය සොයන්න.

05). නිව්ටන් $P,Q,R,P,2P,3P$ බල , පැත්තක දිග මීටර $2a$ වූ $ABCDEF$ ඒකතල සවිධි ෂඩාස්‍රයක පිළිවෙලින් AB,BC,CD,DE,EF,FA පාද දිගේ , අකුරු පටිපාටියෙන් දැක්වෙන අතට ක්‍රියා කරයි.

i. පද්ධතිය බලයුග්මයකට තල්‍ය නම් P ඇසුරෙන් Q හා R සොයා, යුග්මයේ ඝූර්ණය ගණනය කරන්න.
ii. පද්ධතිය AD දිගේ තනි බලයකට තුල්‍ය වෙයි නම් P ඇසුරෙන් Q හා R සොයන්න.

(b). රළු තිරස් ගෙබිමක නිසල ව තිබෙන බර w වූ A අංශුවකට එක කෙළවරක් සම්බන්ධ කර ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ගෙබිම සමඟ B ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ යන ජනකයක් දිගේ ස්පර්ශ ව ගෙබිමෙහි



නිස්සලතාවයෙහි ඇති, අරය a සහ බර W වූ ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් වටා

ඔතනු ලැබ ඇත. තන්තුවේ අනෙත් කෙළෙවර සිලින්ඩරයට සවිකර ඇත. තන්තුව ඔස්සේ යන සිරස් තලය , සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බ වන අතර, සිලින්ඩරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යමින් , රූපයේ දක්වා ඇති අයුරින් AB දිගේ ගෙබිම ඡේදනය කරයි. තන්තුව යාන්තමින් නොබුරුල්ව ඇති අතර , AB සමග α කෝණයක් සාදයි . සිලින්ඩරය B හි දී චලනය වීම වැළැක්වීමට තරම් ගෙබිම රළු වෙයි. අංශුව සීමාකාරී සමතුලිත්තාවේ තිබෙන පරිදි , සිලින්ඩරයට , ඝූර්ණය G වූ බල යුග්මයක් යොදනු ලැබෙයි. අංශුව සහ ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{\mu w}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$ බව පෙන්වන්න.

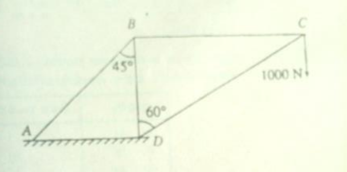
B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් G හි අගය සොයන්න.

06)(a). AB හා BC යනු සාමාන දිග සහ පිළිවෙළින් W හා $2W$ බර සහිත ඒකාකාර දඬු දෙකකි . ඒවා B හි දී සුමට ලෙස එකට අසව් කර ඇති අතර , A හා C හි දී අචල තිරස් බාල්කයකට ද අසව් කර ඇත. දඬු AC ට පහළින් B පිහිටින පරිදි හා $C\hat{A}B = \alpha$ වන පරිදි සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ ඇත.

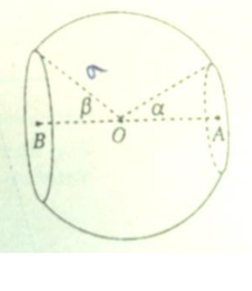
i. B හි දී අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය $\frac{3}{4}W\cot\alpha$ බව පෙන්වා, මෙම ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය සොයන්න.

ii. තවදුරටත් A හා C හි ප්‍රතික්‍රියාවල ක්‍රියා රේඛා එකිනෙකට ලම්බ වෙයි නම්, $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$ බව පෙන්වන්න.

(b). නිදහස් ලෙස සන්ධි කරන ලද AB, BC, CD හා BD ලුහු දඬු හතරකින් සෑදී දොඹකරයක් රූපයෙන් පෙන්නුම් කෙරේ. BD දණ්ඩ සිරස් වන අතර , BC දණ්ඩ තිරස් වේ. දොඹකරය A හා D හි දී තිරස් පොළොවට සවිකර ඇති අතර , $1000\ N$ භාරයක් C හි දී දරයි. ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬුවල බල සෙවීමට බෝ අංකනය යොදාගන්න.



07). රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට , අරය a , කේන්ද්‍රය O සහ පෘෂ්ඨ ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලකින්, O සිට (O හි දෙපැත්තේ) $a\cos\alpha\, , a\cos\beta$ දුරින් වූ සමාන්තර තල දෙකකින් , කලාපයක් කපා වෙන් කෙරෙයි; මෙහි $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ වෙයි.



අනුකලනයෙන්,

i. කලාපයේ ස්කන්ධය $2\pi a^2\sigma(\cos\alpha + \cos\beta)$ බව.

ii. කලාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, සමමිතික අක්ෂය මත එහි A, B දෙකෙළවර අතර හරි මැද පිහිටින බව පෙන්වන්න.; මින් A කෙළෙවර , O සිට $a\cos\alpha$ දුරින් වේ.

σ පෘෂ්ඨ ඝනත්වයම සහිත අරය $a\sin\beta$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් , සිය කේන්ද්‍රය B හි පිහිටින පරිදි කලාපයේ වඩා විශාල වෘත්තාකාර දාරයට සවිකරනු ලැබේ. $\sin\alpha = \sin\beta\sqrt{1-\cos\beta}$ වෙතොත් , සංයුක්ත වස්තුවට ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් ගෙබිමක් මත ඇති අයුරින් සමතුලිතතාවේ නිසලව පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

08). එක්තරා රියැදුරෙකු ඔහුගේ මෝටර් රථය නගරයක නවතා තබන ඕනෑම විටෙක දී නවතා තැබීමේ වරදක් කිරීමේ සම්භාවිතාව p වෙයි. ඔහු නවත්වා තැබීමේ වරදක් කරන ඕනෑම විටෙක දී ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව q වෙයි.

(a). රියැදුරා එක්තරා දිනක දී ඔහුගේ මෝටර් රථය නගරයේ නවත්වා තබයි.

i. ඉහත අවස්ථාවට අනුරූප නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න.

ii. රුක් සටහනක් ඇඳ, ඒ නයින්, එක් එක් විය හැකි ප්‍රතිඵලයේ සම්භාවිතාව ලබාගන්න.

(b). රියැදුරා එක්තරා දිනයක ඔහුගේ රථය නගරයේ දෙවරක් නවතා තබයි නම්,

i. ඉහත අවස්ථාවට අනුරූප රුක් සටහන අඳින්න.

ii. වාර දෙකේ දී ම ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

iii. වාර දෙකේ දී ම ඔහු නවතා තැබීමේ වරද කර ඇතැයි දී ඇති විට, ඔහුට එක් වරක් පමණක් දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

iv. එක් අවස්ථාවක දී පමණක් ඔහු නවතා තැබීමෙ වරදක් කර ඇතැයි දී ඇති විට, ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09)(a). නිරීක්ෂණ n අඩංගු කුලකයක මධ්‍යනාය සහ විචලතාවය අර්ථ දක්වන්න. $\{x_1, x_2, \ldots . x_n\}$ යනු මධ්‍යනාය $\bar{x}$ හා විචලතාවය σ_1^2 සහිත නිරීක්ෂණ n අඩංගු කුලකය යැයි ගනිමු. $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ යනු මධ්‍යනාය $\bar{y}$ හා විචලතාවය σ_2^2 සහිත නිරීක්ෂණ m අඩංගු වෙනත් කුලකයක් යැයි ගනිමු.
$\bar{z}$ හා σ^2 යනු පිළිවෙළින් සංයුක්ත නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යනාය සහ විචලතාවය යැයි ගනිමු.

i. $\bar{z} = \frac{n\bar{z}+m\bar{y}}{n+m}$ බව.

ii. $d_i = \bar{x} - \bar{y}$ වන $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{z})^2 = n(\sigma_1^2 + d_1^2)$ බව (ඉඟිය $x_i - \bar{z} = x_i - \bar{x} + \bar{x} - \bar{z}$)

iii. $d_2 = \bar{v} - \bar{z}$ වන $\sigma^2 = \frac{1}{n+m}\{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)\}$ බව පෙන්වන්න.

(b). සිසුන් 100 ක කණ්ඩායමක් එක්තරා ගණිත පරීක්ෂණ පත්‍රයකට පෙනී සිටියහ පරීක්ෂණ පත්‍රයෙහි සමත්වීමේ ලකුණ 30 වෙයි. සමත් අපේක්ෂකයන්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තිය පහත වගුවේ දී ඇත.

ලකුණු	ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව
30-34	5
35-39	10
40-44	15
45-49	30
50-54	5
55-59	5

i. සමත් අපේක්ෂකයින්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාවය සොයන්න.

ii. සියලු සිසුන් 100 දෙනාගේ ම ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 38 හා 12 වෙයි. අසමත් අපේක්ෂකයින්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාවය සොයන්න.