ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2007 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I | පැය තුනයි.

01)(a). α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. α^3 හා β^3 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\alpha^3 + \frac{1}{\beta^3}$ හා $\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b). $f(x)$ යනු, මාත්‍රය 3 ට වැඩි, x හි බහු පදයකි. පිළිවෙළින් $(x-1),(x-2)$ හා $(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ a,b හා c වේ. ශේෂ ප්‍රමේය නැවත නැවත යෙදීමෙන් , $(x-1)(x-2)(x-3)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $\lambda(x-1)(x-2)+\mu(x-1)+\nu$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි λ, μ හා ν යනු නියත වේ.
a,b හා c ඇසුරෙන් λ, μ හා ν සොයන්න.

02)(a). අපේක්ෂකයෙකු විභාගයකදී, එක් එක් කොටසට ප්‍රශ්න හතර බැගින් අඩංගු A,B හා C නම් කොටස් තුනක් යටතේ දෙන ලද ප්‍රශ්න දොලහකින්, ප්‍රශ්න හයකට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.

i. එක් එක් කොටසේ පළමු ප්‍රශ්නය අනිවාර්‍ය නම්,
ii. ඕනෑම කොටසකින් ප්‍රශ්න තුනකට වඩා වැඩියෙන් ඔහුට පිළිතුරු සැපයිය නොහැකි නම්,
iii. එක් එක් කොටසින් යටත් පිරිසෙයින් එක් ප්‍රශ්නයකටවත් පිළිතුරු සැපයීම අනිවාර්‍ය වේ නම්,

අපේක්ෂකයාට ප්‍රශ්න හය තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b). ධණ නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
a,b හා d යනු $a = b + d$ වන අයුරින් වූ නිඛිල වේ. $a^n - b^{n-1}(b+nd)$ යන්න ධණ නිඛිලමය n සඳහා d^2 න් බෙදිය හැකි බව පෙන්වන්න.

U යනු පළමු පදය a හා පොදු අන්තරය d වූ සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වැනි පදය නම්, $a^n - (a-d)^{n-1}U$ යන්න d^2 න් බෙදිය හැකි බව පෙන්වන්න.
$7^{60} - 3^{64}$ යන්න 16 න් බෙදිය හැකි බව අපෝහනය කරන්න.

03)(a). ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින්, ධණ නිඛිලමය n සඳහා $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{34n}{105}$ යන්න නිඛිලයක් බව සාධනය කරන්න.

(b). $\frac{3}{1\cdot2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{2\cdot3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{3\cdot4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය U_r ලියා දක්වන්න.
$U_r=f(r-1)-f(r)$ වන අයුරින් $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $S_n=\sum_{r=1}^{n}U_r$ සොයන්න.

$\lim_{n\to\infty}S_n$ අගයන්න.

04)(a). $Z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ හා $Z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනක පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කෙරෙයි. $ArgZ_1$ හා $ArgZ_2$ සොයන්න.
OACB යනු ආගන්ඩ් සටහනේ සමචතුරස්‍රයක් යැයි දී ඇත්නම්. C මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

(b) (i). $\left|Z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|\leq 2$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|Z-3|$ හි අඩුතම හා වැඩිතම අගයන් සොයන්න.

(ii). $Arg(Z-1)=\frac{\pi}{6}$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|Z|$ හි අඩුතම අගය සොයන්න.

05)(a)(i). ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^r}{dx^r}(xe^x)=(x+r)e^x$ බව පෙන්වන්න.

(ii). $v=x^2e^x$ නම් $\frac{dy}{dx}=2xe^x+y$ බව සාධනය කරන්න.
$\frac{d^ry}{dx^r}-\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}=2(x+r-1)e^x$ බව අපෝහනය කරන්න.
ඒ නයින්, ඕනෑම n ධණ නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^ny}{dx^n}=n(2x+n-1)e^x+y$ බව පෙන්වන්න.

(c). $p(at^2,at^3)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $ay^2=x^3$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී නැවතත් වක්‍රයට හමුවේ; මෙහි a යනු නියතයකි t ඇසුරෙන් Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

06)(a). භින්න භාග උපයෝගි කරගනිමින් $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ සොයන්න.

(b). $25\cos x + 15 \equiv A(3\cos x + 4\sin x + 5) + B(-3\sin x + 4\cos x) + C$ වන ආකාරයට A,B හා C සොයන්න.
ඒනයින්, $\int \frac{25\,cosx + 15}{3\,cosx + 4\,sinx + 5}\,dx$ සොයන්න.

(c). කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 x\,dx = \frac{5}{6} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\,dx = \frac{5\cdot3}{6\cdot4} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\,dx = \frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^6 3x\,dx$ අගයන්න.

07). ABC යනු A ≡ (2,4) ද y = x + 1 රේඛාව මත B හා C ද වන පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. ABC හා ADE ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලය 9 : 4 අනුපාතයට වන අයුරින් BC ට සමාන්තරව අඳින ලද l නම් රේඛාවක් , AB හා AC පිළිවෙලින් D හා E හිදී කපයි. G යනු A සිට l ට ඇඳි ලම්භයේ අඩියද ,M යනු AB තුළ G හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්භය යැයි ගනිමු.

I. G හි ඛණ්ඩාංක හා l හි සමීකරණය සොයන්න.
II. AM = AG බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ වෙන්ත අයුරකින් හෝ B ලක්ෂ්‍යය y = x + 1 රේඛාව මත චලනය වන විට M ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍රය A හා අරය $\frac{\sqrt{2}}{3}$ වූ වෘත්තයක් මත චලනය වන බව සාධනය කරන්න.

08). වෘත්ත දෙකකට ඒවායේ ඡේධන ලක්ෂ්‍යය එක එකකදී අඳිනලද ස්පර්ශක දෙක සෘජුකෝණික වන විට එම වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්භව ඡේධනය වේ යැයි කියනු ලැබේ . $x^2+y^2+2gx+2fy = 0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c' = 0$ ප්‍රලම්භව ඡේධනය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.

$x^2+y^2+4x+2\lambda y-6 = 0$ සමීකරණය $(-2+\sqrt{10}\ ,0)$ හා $(-2-\sqrt{10}\ ,\ 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්ත පද්ධතිය නිරූපණයකරන බව සාධණය කරන්න . මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.

S = 0 යනු ඉහත පරාමිතික සමීකරණය මඟින් නිරූපණය කෙරෙන පද්ධතියට අයත් වෘත්තයක් වේ. S = 0 ට ප්‍රලම්භ , එම පද්ධතියට අයත් අනන්‍ය S'= 0 වෘත්තයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

$S \equiv x^2+y^2+4x+4y-6 = 0$ වන විට S' = 0 සොයන්න.S = 0 හා S' = 0 දෙකටම ප්‍රලම්භ වෘත්තයේ සාධාරණ සමීකරණය සොයන්න.
09)(a). සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

P යනු $PAB = PBC = PCA = \varphi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි.

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{abc}{2}\left(\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab}\right) sin\varphi$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{sin^2\varphi} = \frac{1}{sin^2A} + \frac{1}{sin^2B} + \frac{1}{sin^2C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b).

i. $2\,tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

ii. $2\,tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$

iii. $tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right) - \frac{\pi}{4} = tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

බව පෙන්වන්න.

$4\,tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.