ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව	
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2009 අගෝස්තු	
සංයුක්ත ගණිතය I	පැය තුනයි.

01)(a). α හා β යනු $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c\neq 0$ වේ. $\alpha^3\beta^2$හා $\alpha^2\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.
ඒ නයින්, $\alpha^3\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3+\frac{1}{\alpha^3\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b). $f(x)$ බහු පදය $x-\alpha$ වලින් බෙදූවිට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ බහු පදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂය,
$A(x-\beta)(x-\gamma)+B(x-\alpha)(x-\gamma)+C(x-\alpha)(x-\beta)$ ආකාරය ගනියි. මෙහි α,γ සහ β සමාන නොවන තාත්වික සංඛ්‍යාවේ.
α,γ , $\beta, f(\alpha)$, $f(\beta)$ හා $f(\gamma)$ ඇසුරෙන් A,B සහ C නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, x^5-kx යන්න $(x+1)(x-1)(x-2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු නොවන සේ k නියතයේ අගය සොයන්න.

02)(a). PHILOSOPHY යන වචනයේ අකුරු දහයම ගෙන සෑදිය ගැකි වෙනස් පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මේවායින් කොපමණක H,I,S හා Y යන අකුරු එකට තිබේද?
PHILOSOPHY යන වචනයේ අකුරු දහයෙන් 5 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන ද සොයන්න.

(b). $p_n=n(n+1)\ldots(n+r-1)$ යැයි ගනිමු; මෙහි n හා r ධණ පූර්ණ සංඛ්‍යාවේ.
$np_{n+1}=np_n+rp_n$ බව පෙන්වන්න.

p_n/n යන්න $(r-1)!$ වලින් බෙදෙන බව උපකල්පනය කර. $p_{n+1}-p_n$ යන්න $r!$ වලින් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

අනුයාත ධණ නිඛිල r සංඛ්‍යාවක ගුණිතය r! වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

03)(a). ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතා කර ගනිමින්,
$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} n_{c_r}\, x^{n-r} y^r$ බව සාධනය කරන්න; මෙහි n ධණ පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් වන අතර , $n_{c_r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ වේ.
$(p+q)^n - p^n - q^n$ යන්න pq වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි p,q හා n ධණ පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ.

(b). අපරමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය u_r යන්න $\frac{(2r+1)}{(3r-2)(3r+1)} \cdot \frac{1}{7r}$ මඟින් දැනු ලැබේ.
$u_r = f(r-1) - f(r)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} u_r = S_n$ සොයා $\lim_{n\to\infty} S_n$ හි අගය සොයන්න.

04)(a). $-80-18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ වර්ගමූලය සොයා,
$4Z^2 + (16i-4)Z + (65+10i) = 0$ වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(b). ආර්ගන්ඩ් සටහනක $\arg(Z+1) = \frac{\pi}{3}$ සමීකරණය විවරණය කර $|Z|$ හි අවම අගය සොයන්න.

(c). ω යනු $Z^3 - 1 = 0$ සමීකර්ණයේ සංකීර්ණ මූලයක් නම් එවිට ω^2 අනෙක් සංකීර්ණ මූලය බව පෙන්වන්න.
$\omega^{2k} + (1+\omega)^k = 0$ බවද පෙන්වන්න; මෙහි k ඔත්තේ ධණ පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

ඔත්තේ ධණ පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k සඳහා x^2+x+1 යන්න $x^{2k} + (1+x)^k$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

05)(a). ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන්, $f(x) = \sin x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
$g(x) = \cos x$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

i. $sin\left(\ln(1+x^2)\right)$
ii. $\cos(sinx)$

x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

(b). $y = sink\theta\ cosec\theta$ සහ $x = cos\theta$ යැයි ගනිමු; මෙහි k නියතයකි.

i. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx} - xy + k\ cosk\theta = 0$

ii. $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+(k^2-1)y=0$ බව සාධනය කරන්න.(c). $p\left(3,\frac{1}{5}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $y\left(1+x^2\right)=2$ වක්‍රයට අඳි ස්පර්ශකය , Q දී නැවතත් වක්‍රය හමු වේ. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

06)(a). $I_k=\int\frac{e^t}{t^k}dt$ යැයි ගනිමු; මෙහි $t>0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

$(k-1)I_k-I_{k-1}+\frac{e^t}{t^{k-1}}=C$ බව පෙන්වන්න; මෙහි C අභිමත නියතයකි.

$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2dx$ සොයන්න; මෙහි $x>-1$.

(b). f යනු තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්වික අගයන් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර $J=\int_0^a f(x)dx$ වේ. මෙහි $a>0$ වේ.

$\int_0^a f(a-x)dx=J$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^{2k}x}{cos^{2k}x+sin^{2k}x}dx$ අගයන්න. මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

07) (x_o,y_0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $ax+by+c=0$ සරල රේඛාවට ලම්භ සරල රේඛා මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0+at\ ,\ y_0+bt\ )$ ආකාරයෙන් දිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

එනයින් $ax+by+c=0$ රේඛාව තුළ (x_o,y_0) ලක්ෂ්‍යයෙහි දර්පණ ප්‍රතිබිම්භයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. OAB ත්‍රිකෝණයෙහි OA සහ AB පාදවල ලම්භ සමච්ඡේධක වල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x\cos\theta+y\sin\theta=1$ හා $x-y=1$ මෙහි $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ වන අතර , O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ. OAB ත්‍රිකෝණයේ පාද තුනෙහි සමීකරණ සොයන්න.

තවද OB පාදයෙහි ලම්භ සමච්ඡේධකයේ සමීකරණය සොයා OAB ත්‍රිකෝණයේ පාද වල ලම්භ සමච්ඡේධක ඒකලක්ෂ්‍යය වන බව සත්‍යපණය කරන්න.

08) . $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ සමීකරණ මගින් ඡේධනය නොවන වෘත්ත දෙකක් නිරූපණය කෙරේ . වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර O_1 සහ O_2 යැයි ගනිමු . O_1 සහ O_2 අතර පිහිටි T ලක්ෂයක සිට වෘත්ත දෙකට පොදු ස්පර්ශක යුගලක් ඇඳිය හැක . T හඳුනාගෙන එහි ඛණ්ඩාංක , O_1 සහ O_2 හි ඛණ්ඩාංක සහ වෘත්ත දෙකේ අරයන් ඇසුරෙන් සොයන්න.

වෘත්ත දෙකට දෙවන ස්පර්ශක යුගලක් ඇඳියහැකි , O_1O_2 විස්තෘත රේඛාව මත පිහිටි T' ලක්ෂ්‍යය ද හඳුනාගෙන T' හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 86 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 74 = 0$ වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි පොදු ස්පර්ශක හතරේ සමීකරණ සොයන්න.

09)(a). සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

A,B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක්, ආරෝහණ පිළිවෙලට, තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. $AB = x$ වන අතර, D යනු C සිට h උසක් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. CD මගින්, A සහ B හි දී පිළිවෙලින් α සහ β කෝණ ආපාතනය කරයි.

I. $h = \frac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\theta}$

II. $d = \frac{x \sin(\alpha+\theta)\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

බව සාධනය කරන්න; මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

(b).

i. $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්.

ii. $tan^{-1}\frac{1}{2} - tan^{-1}\frac{1}{3} = sin^{-1}x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.