ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර(උසස් පෙළ),2009 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය II	පැය තුනයි

01)(a). බැලූනයක් පොළොවට සාපේක්ෂව නියත u ප්‍රවේගයකින් ඉහළ නගියි. කාලය $t = 0$ හි දී P අංශුවක් , බැලූනයට සාපේක්ෂව v ප්‍රවේගයෙන් , බැලූනයේ සිට සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය $t = t_1$ හි දී තවත් Q අංශුවක් , බැලූනයට සාපේක්ෂව v ප්‍රවේගයෙන් ම බැලූනයේ සිට සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය $t = t_2$ හි දී P සහ Q අංශු දෙක එකිනෙකට හමු වේ.

i. $0 \leq t \leq t_1$ දී බැලූනයට සාපේක්ෂව P හි චලිතය,

ii. $t_1 \leq t \leq t_2$ දී P ට සාපේක්ෂව Q හි චලිතය

සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් වෙන වෙන ම අඳින්න.

එ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $t_2 = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{g}} + \frac{1}{2}t_1$ බව පෙන්වන්න.

අංශු දෙක හමුවන විට Q සහ P හි ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $u \pm \frac{1}{2}gt_1$ බව, තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b). $u\,kmh^{-1}$ වේගයෙන් ගමන් කරන සබ්මැරීනයක් දකුණින් $30°$ ක් බටහිර දිශාවට $d\,km$ දුරකින් මුහුදේ වූ නැවක් දකියි. එම නැව $v\,kmh^{-1}$ වේගයෙන් උතුරට ගමන් කරමින් තිබේ ; මෙහි $u < v < 2u$ වේ. නැවට සාපේක්ෂව සබ්මැරීනයේ චලිතය සැලකීමෙන් නැව අල්ලා ගැනීම සඳහා සබ්මැරීනය දිශා දෙකකින් එකක් ඔස්සේ ගමන් කළයුතු බව පෙන්වා. එම දිශා දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

ඒවාට අනුරූප කාල , පැය $\frac{d\sqrt{4u^2-v^2}}{v^2-u^2}$ කින් වෙනස් වන බව තවදුරටත් පෙ 2009

02)(a). ස්කන්ධය 2m වූ සුමට කූඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ වූ හරස්කඩ C දී සෘජුකෝණී වූ ABC ත්‍රිකෝණයකි .BAC කෝණය $60°$ වන පරිදි වූ A ශීර්ෂයෙහි කුඩා සුමට කප්පියක් සවි කර ඇත . සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් කප්පිය උඩින් යන අතර එහි දෙකෙළවරට ස්කන්ධය පිළිවෙලින් 3m හා m වූ P සහ Q අංශු ඈඳා ඇත කූඤ්ඤය එහි BC මුහුනත සුමට තිරස් මේසයක ස්පර්ශ වන පරිදි තබා ඇත. Q අංශුව AC සිරස් මුහුණත සමඟ ස්පර්ශ වන පරිදි A ට සිරස්ව පහළින් අල්ලා තබන අතර P අංශුව AB ආනත තලය මත තබා ඇත .දැන්, Q නිදහස් කරනු ලබයි නම් , කූඤ්ඤයේ ත්වරණය $\frac{\sqrt{3}g}{23}$ බව පෙන්වා තන්තුවේ ආතතිය ගණනය කරන්න.

(b). දිග l වූ සරල අවලම්බයක් නිශ්චලතාවේ එල්ලී ඇත්තේ බට්ටා තිරස් ගෙබිමක සිට $2l$ උසකින් ඇතිවිටය. බට්ටාට සමාන ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් බට්ටා සමඟ තිරස්ව ගැටී පසුව තන්තුව ආරම්භක රේඛාවේ සිට $l/2$ තිරස් දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ගෙබිමට ලඟා වේ.ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණීමට පෙර තන්තුව α සුළු කෝණයකින් හැරෙයි නම් , අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{8\, sin\frac{\alpha}{2}-1}{8\, sin\frac{\alpha}{2}+1}$ බව පෙන්වන්න.

03). ස්කන්ධය m අංශුවක් දිග l වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළෙවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනෙත් කෙළෙවර අවල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර, අංශුව ගුරුත්වය යටතේ සමතුලිතව පවතී. අංශුව ඊළඟට u වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

i. O ඔස්සේ යන යටිඅත් සිරස සමග තන්තුව θ කෝණයක් සාදන විට එහි ආතතිය $m\left(3g\cos\theta - 2g + \frac{u^2}{l}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ii. පසුව , අංශුව O හි තිරස් මට්ටමට ළඟාවීමට හැකිවන පරිදි u ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය සොයන්න.

iii. තන්තුව පළමුවරට තිරස් වන විට , එහි චලන තලයට ලම්බව , O සිට $\frac{l}{2}$ ක දුරකින් සවිකර ඇති සිහින් තිරස් දණ්ඩක් සමග ස්පර්ශ වේ . $2gl < u^2 < \frac{7}{2}gl$ වෙයි නම්, අංශුව දණ්ඩේ මට්ටමෙන් $\frac{l}{2}$ ක උසකින් පිහිටි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ලඟා වීමට පෙර තන්තුවා බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

04). P අංශුවක් $x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තය මත , ඒකාකාර $a\omega$ වේගයෙන් චලනය වෙයි. Q යනු P සිට $y-$අක්ෂයේ මත ලම්බයේ අඩිය නම්, කාලාවර්ථය $\frac{2\pi}{\omega}$ වූ සරල අනුවර්තී චලිතයක Q යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු සර්පිල දුන්නක් ස්වකීය අක්ෂය සිරස්ව ඇතිව , පහත කෙළෙවරෙහි සවි කර ඇත. දුන්නේ උඩු කෙළෙවර මත තබන ලද ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට නිංශ්චලව තිබෙන දුන්න d දුරක් සම්පීඩනය කළ හැකිය. මෙහි $d < l$ වේ. එම අංශුවම h උසක සිට දුන්නේ උඩු කෙළෙවර මත වැටීමට සැලැස්වූයේ නම් $l \geq a + d$ බව දී ඇති විට විස්තාරය $a = \sqrt{d^2 + 2dh}$ වන සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

මෙම චලිතයේ දී අංශුව, අඩු තරමින් $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{h}}$ කාල ප්‍රාන්තරයක් වත් දුන්න මත රැඳී පවතී නම් $\left(\frac{h}{d}\right)$ හි උපරිම අගය සොයන්න.

05)(a). බර W වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලක්, තිරසට $30°$ කෝණයකින් ආනත වූ අචල රළු පීල්ලක් මත නිශ්චලතාවේ ඇත. වළල්ල සහ පීල්ල එකම සිරස් තලයේ තිබේ. වළල්ල සමතුලිත්තාවේ අල්ලා තබා ඇත්තේ, වළල්ලෙන් ස්පර්ශීව ඉවත්වන සහ පීල්ලට $30°$ ආනතියකින් යුත් තන්තුවක් ආධාරයෙනි.මෙම කෝණය පීල්ලේ ආනතිය මනින අතටම මනිනු ලැබේ. තන්තුවේ ආතතිය සොයා, පීල්ල සහ වළල්ල අතර සර්ෂණ සංගුණකය $(2-\sqrt{3})\sqrt{2}\cos 15°$ ට වඩා අඩු නොවිය යුතු බව පෙන්වන්න.

(b). ABCDEF යනු පැත්තක දිග මීටර a වූ සවිධි ෂඩස්‍රයකි. නිව්ටන් $p, 3p, 2p,$ සහ $4p$ බල පිළිවෙලින් BA, EB, DE, සහ AD දිගේ, අකුරු පිළිවෙළට දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය සහ දිශාව සොයන්න.

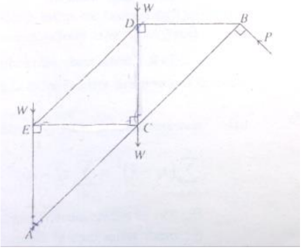
ෂඩස්‍රයෙහි එක් ශීර්ෂයක් වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

ෂඩස්‍රයෙහි තලයේ ක්‍රියා කරන කුමන බල යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කිරීමෙන් පදිධතිය $\overrightarrow{FE}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට ඌනනය වෙයි ද?

06)(a). එක එකක දිග $2a$ සහ බර W වූ AB, BC සුමට ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හිදී නිදහස් ලෙස අසව්කර, O අචල ලක්ෂ්‍යයකට බැඳී එක එකක දිග $2a$ වූ AO, CO සැහැල්ලු අවිතන්‍යය තන්තු දෙකකින් එල්ලා ඇත. බර W සහ අරය $\frac{a}{3}$ වූ ඒකාකාර ගෝලයක් දඬු සමඟ ස්පර්ශව සහ ඒවායින් ආධාර කරනු ලැබ ඇත. සමතුලිත පිහිටීමේදී එක් එක් දණ්ඩ සිරස සමඟ සාදන θ කෝණය $cot^3\theta + cot\theta - 30 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$cot\theta$ සඳහා තිබිය හැකි එකම අගය සොයා, ඒ නයින් ,B අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව W බව පෙන්වන්න.

(b). රූපයේ දැක්වෙන, සැහැල්ලු දඬුවලින් සෑදි රාමු සැකිල්ලෙහි තිරස් සහ සිරස් දඬු සමාන දිගින් යුක්ත වන අතර , සියලු ම කෝණ 90° හෝ 45° හෝ වේ. සිරස් තලයක පිහිටින එය, A හි දී සුමට ලෙස විවර්තනය කර, B හි දී AB ට ලම්බ P බලයකින් ආධාර කරනු ලැබ ඇති අතර, C, D, E හිදී නිව්ටන් W භාර දරයි. P හි අගය W ඇසුරෙන් සොයන්න. CD දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය ශුන්‍ය වන බව තවදුරටත් දී ඇත්නම්, BD, BC සහ DE දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සෙවීම සඳහා , බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. මෙම ප්‍රත්‍යාබල සොයා, ඒවා ආතති ද, තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

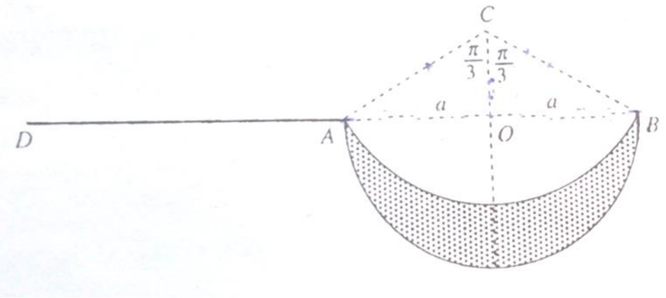


07). කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටින බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්ත කණ්ඩයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ දුරකින් පිහිටින බව පෙන්වන්න.

ළසඳ හැඩ ඒකාකාර ආස්තරයක්, රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි, කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයකින් සහ ස්වකීය C කේන්ද්‍රයෙහි $\dfrac{2\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය වෘත්ත චාපයකින් පරයන්තගත වේ.

මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, C සිට ka දුරකින් පිහිටින බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = \frac{3\sqrt{3}\pi}{\pi+6\sqrt{3}}$ වේ.



ආස්තරයේ ස්කන්ධය M යැයි ගනිමු. දිග $2a$ සහ ස්කන්ධය m වන AD සිහින් ඒකාකාර ඍජු දණ්ඩක්, දික් කරන ලද BA රේඛාව දෙගේ පිහිටින පරිදි A කෙළෙවරේදී දෘඪ ලෙස ළසඳට සවි කර , රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි දැකැත්තක් සාදා ඇත. ආස්තරය තලය සිරස්ව, අර්ධ වෘත්තය සහ දණ්ඩේ නිදහස් D කෙළවර, ගෙබිම ස්පර්ශ කරන පරිදි , දැකැත්ත තිරස් ගෙබිමක තබා ඇත. මෙම පිහිටීමේ, එය සමතුලිතව පවතී නම් , $M(\sqrt{3}k-1) < 4\sqrt{6}m$ බව පෙන්වන්න.

08). A හා B යනු $P(A) > 0$ වන සිද්ධි දෙකකි.
A දී ඇති විට B හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(B/A)$ අර්ථ දක්වන්න.

A, B හා C සිදධි තුනක් සඳහා $P(A) > 0$ හා $P(A \cap B)$ වෙතොත් , $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|(A \cap B))$ බව පෙන්වන්න.

(B_1, B_2, B_3) යනු Ω නියැදි අවකාශයක විභාගනයක් ද , A යනු Ω හි ඕනෑම සිදිධියක් යැයි ද ගනිමු.
$i = 1,2,3$ සඳහා $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\,P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$ බව පෙන්වන්න.

හරස් මාර්ගයක වෙත ළඟාවෙන වාහන, වමට , දකුණට හෝ ඍජුව ඉදිරියට යන දිශා තුනකින් එකක් ඔස්සේ යා යුතුය. බටහිර දෙසින් පැමිණෙන වාහනවලින් 50% ක් වමට හා 20% ක් දකුණට හරවන අතර, ඉතිරි වාහන ඍජුව ඉදිරියට ධාවනය කරන බව රථවාහන ඉංජිනේරුවන් නිරීක්ෂණය කර ඇත. එක් එක් වාහනයේ රියැදුරු ස්වායක්ත ලෙස දිශාව තෝරා ගන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, බටහිර දෙසින් හරස් මාර්ගය වෙත ළඟාවෙන ඊළඟ වාහන තුනකින් ,

i. සියල්ලම ඍජුව ඉදිරියට,
ii. සියල්ලම එකම දිශාවට,
iii. දෙකක් දකුණට හා එකක් වමට හරවා,
iv. සියල්ලම වෙනස් දිශාවලට,

ධාවනය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

අනුයාත වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය කෙරේ නම්, බොහෝවිට ඒවා සියල්ලම වමට හරවන බව පෙන්වන්න.

09)(a). සංගහනයකින් ගන්නා ලද තරම n වන සසම්භාවී නියැදියක අගයන් $x_1, x_2 \dots x_n$ යැයි ගනිමු.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{x}$ යනු නියැදි මධ්‍යන්‍යය වේ.

පිටු 250 ක් අඩංගු පොතක පළමු පිටු 200 තුළ එක එකක දෝෂ ගණන වන x නිරීක්ෂණය කරණ ලද අතර, පහත සඳහන් විස්තර සොයා ගන්නා ලදි.

මුද්‍රණ දෝෂවල මුළු ගණන 920,

මුද්‍රණ දෝෂවල වර්ගවල එකතුව 5032

පිටුවක ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න. අවසාන පිටු 50 තුළ පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 4.4 හා 2.2 වේ. ප්‍රමූල ධර්ම උපයෝගී කර ගනිමින් පොතෙහි පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව සොයන්න.

(b). පරීක්ෂණයක දී සිසුන් කණ්ඩායමක ශුද්ධ ගණිතය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 වේ. මෙම ලකුණු මධ්‍යන්‍යය 50 හා සම්මත අපගමනය 15 වන ආකාරයට රේඛීය ලෙස පරිමාංකනය කරනු ලැබේ. තවද පරිමාංකනය කරන ලද 80 ලකුණ, 70 මුල් ලකුණකට අනුරූප වන බව දී ඇත.

i. රේඛීය පරිමාණය,
ii. මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය,
iii. පරිමාංකනය මගින් වෙනස් නොවන ලකුණ

ගණනය කරන්න.

පරිමාංකනය කරන ලද ලකුණුවල අඩුතම හා වැඩිතම ලකුණු පිළිවෙලින් 2 හා 92 යයි දී ඇත. ඒවාට අනුරූප මුල් ලකුණු සොයන්න.