ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2015 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2015 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2015

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) x හි මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv \left(x^2 - \alpha x + 1\right)\left(x^2 - \beta x + 1\right)$, මෙහි α හා β තාත්ත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$,

$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$.

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ යන දෙකට ම එක ම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු ම මූල සොයන්න.

(ii) $F(x) \equiv H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික **නො වන** බව පෙන්වන්න.

(*b*) (i) $f(x) \equiv 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි γ හා δ තාත්ත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න.

12. (*a*) නිපුණතා සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඩුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඩුල්ල තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු, ගායිකාවන් හය දෙනකු, ගායකයින් පස් දෙනකු, නිළියන් දෙදෙනකු හා නළුවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඩුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඩුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයකු මඩුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

(ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනකු හා ගැහැනු දෙදෙනකු මඩුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

13. (*a*) **A, B** හා **C** න්‍යාස තුනක්

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \text{ හා } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. **CA** ගුණිතයත් සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I}_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒනයින්**, **DC** ගුණිතය සොයන්න.

(*b*) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta(-\pi < \theta \le \pi)$ තාත්ත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි z යන්න $z \ne \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\mathrm{Im}(w) = 0$ හා $\mathrm{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්**, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

14. (*a*) $x \ne 0$ සඳහා $y = x\sin\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos\frac{1}{x}$ හා

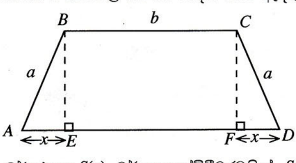
(ii) $x^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$

බව පෙන්වන්න.

(*b*) $x \ne 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) දී ඇති රූපයෙහි, $ABCD$ යනු, BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$, වර්ග සෙන්ටිමීටරවලින් $S(x) = (b+x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට $S(x)$ උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

15. (a) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \dfrac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \dfrac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(c) $\dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, $\dfrac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(d) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \dfrac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

16. වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg'+2ff'=c+c'$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

O මූලයෙහි පොදු කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය $R\,(>r)$ වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙක ම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.

C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකට ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද පොදු ස්පර්ශකයට x-අක්ෂය P හි දී ද y-අක්ෂය Q හි දී ද හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x + 3y = 40$ බවත්, PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $3(x^2+y^2)-30x-40y=0$ බවත් පෙන්වන්න.

17. (a) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1+\cos x)\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\dfrac{f(x)}{1+\cos x} = \sqrt{2}\{g(x)-1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$y=g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්**, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x)=0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

***