

පියවූ ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
ලාභ හා අලාභයන් සඳහා
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
සේවිච්ච පොත්‍රිත තරාතරව්‍යවිකරණ(උසස් තර)ව්‍ය වර්ගය, 1995 ඔක්තෝබර්
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
APPLIED MATHEMATICS I

02	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. P, Q, R හා S යනු පිළිවෙලින් $\vec{OP} = p, \vec{OQ} = q, \vec{OR} = r$ හා $\vec{OS} = s$ පිහිටුම් දෙදිශිත සහිත ප්‍රතිස්ථාපන ලක්ෂණ හතරකි. P, Q, R, S ඒකරේඛීය වෙයි නම්

$$r = (1 - \alpha)p + \alpha q \quad \zeta$$

$$s = (1 - \beta)p + \beta q \quad \zeta$$

එහි පරිදි α හා β යන නියෝග්‍ය සංඛ්‍යා දෙකක් සවිච්චිත බව පෙන්වන්න.

P, Q, R, S ලක්ෂණ පිළිවෙලින් $ABCD$ කල චතුරස්‍රයේ DA, AB, CD හා BC පාද මත පිහිටන්නේ $\vec{DP} = \gamma \vec{PA}, \vec{AQ} = \lambda \vec{QB}, \vec{CR} = \nu \vec{RD}, \vec{BS} = \mu \vec{SC}$ වන පරිදි ය. මෙහි $\lambda\mu\nu\gamma \neq 0$ වේ. $\vec{AB} = b, \vec{AC} = c$ හා $\vec{AD} = d$, නම්, මූල ලක්ෂණය A ලෙස ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R, S ලක්ෂණවල පිහිටුම් දෙදිශිත, $b, c, d, \lambda, \mu, \nu, \gamma$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

ඒ නමින්, P, Q, R, S සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි නම්, $\lambda\mu\nu\gamma = 1$ බව පෙන්වන්න.

2. a, b හා c යනු ඕනෑම නියෝග්‍ය දෙදිශිත තුනක් යැයි සිතමු. $\frac{a}{|a|} \cdot b$ අදිය ලේඛනය ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. ඒ නමින්,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

බව සාධනය කරන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ $\vec{OA} = a$ ζ $\vec{OB} = b$ ζ යැයි සිතමු. $OA > OB$ යැයි සිතමු. L හා M යනු පිළිවෙලින්,

$$\vec{OL} = l = \lambda a + (1 - \lambda) b \quad \zeta$$

$$\vec{OM} = m = \mu a + (1 - \mu) b \quad \zeta$$

යන පිහිටුම් දෙදිශිත සහිත ලක්ෂණ යි. OL හා OM රේඛා මගින් පිළිවෙලින් අභ්‍යන්තර ලෙසක් බාහිර ලෙසක් AOB කෝණය සමවර්ෂීභූත වන පරිදි λ හි හා μ හි අගය, අදිය ලේඛන උපයෝගී කර ගෙන, $a = |a|$ හා $b = |b|$ ඇසුරෙන් නිර්ණය කරන්න.

(i) $\frac{\Delta L}{LB} = -\frac{\Delta M}{MB} = \frac{OA}{OB}$ බවත්

(ii) $\vec{LM} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} (b - a)$ බවත්

අසෝභනය කරන්න.

3. (i) $OABC$ යනු වකුස්තලයකි. $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$ හා $\vec{OC} = \mathbf{c}$ වේ. s_1 , s_2 , s_3 හා s_4 යනු පිළිවෙලින් OAB , OBC , OCA හා ABC ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලවලට සමාන විශාලත්ව ඇති දෛශික යැයි ද ඒවා පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණවලට ලම්බ ලෙස පිට අතට එල්ල වී ඇතැයි ද සිතමු.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{ ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. } \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|s_1|} + \frac{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}{|s_2|} + \frac{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|}{|s_3|} \text{ සොයන්න.}$$

$$\text{තව ද, } \sum_{i=1}^4 s_i \text{ සොයන්න.}$$

- (ii) \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} යනු $Oxyz$ සුරක් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය බණ්ඩාංක පද්ධතියක පිළිවෙලින් Ox , Oy හා Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශිකයි.

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} \quad \mathbf{d}$$

යැයි සිතමු; මෙහි $b_1 \neq 0$ වේ. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ සොයා, ඒ තිබේ.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (c_1 + c_2) \mathbf{b} - (b_1 + b_2 + b_3) \mathbf{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

$$\text{තව ද, } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c} \text{ සහ } |\mathbf{c}| = \sqrt{2} \text{ බව ද සිතන විට } \mathbf{b} \text{ හා } \mathbf{c} \text{ දෛශිකවල සංරචක සොයන්න.}$$

4. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකකල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතව තබා ගනියි නම් එක්කෝ ඒවා ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු බව නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බව පෙන්වන්න.

බර W ද අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට කිරීස් මේසයක් මත තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් තියලට තවකින්ගේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළේ පිහිටන පරිදි ය. කිරීසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වෙයි. කිරීසට දණ්ඩේ ආනතිය θ ($< \frac{\pi}{2}$) ද පාත්‍රයේ ගැටියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

$$(i) \theta = \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{6} \right] \text{ බවත්}$$

$$(ii) l = \frac{1}{2} r \sec \theta \text{ බවත්}$$

$$(iii) R = \frac{W}{(8 + \sqrt{5} - \sqrt{15})^{\frac{1}{2}}} \text{ බවත්}$$

සාධනය කරන්න.

5. යුග්මික සුර්ණය ඊට දක්වන්න. G_1 , G_2 සුර්ණ සහිත ඒකකල යුග්ම දෛශික සමීප්‍රයක්කයක් යුග්මයක් බව පෙන්වා එහි සුර්ණය සොයන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බණ්ඩාංක පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන්, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ වූ, (x_i, y_i) ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන (X, Y) ඒකකල බලපද්ධතියක් එක්කෝ (X, Y) හි බලයකට හෝ G යුග්මයකට හෝ ලඟහතා වන බවත් හැකි නම් සමතුලිතතාවෙන් සරසිත බවත් පෙන්වන්න.

මෙහි පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී බල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

මිනුම් ලක්ෂ්‍ය තුනක් වටා ඒකකල බල පද්ධතියක සුර්ණ එක එකක් යුතා වෙයි නම් පද්ධතිය සමතුලිතතාවෙන් පිහිටන බව අනුමානනය වේ ද? මෙහි පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6. එක එකක් W බරින් යුත් සමාන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුවල ලෙස සන්ධි කර ඒවායේ B සහ C දෙකෙළවර යුතු තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර තිබෙයි. B හා C සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවේ පිහිටා ඇත්තේ එක එකක් තිරයට α ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයකින් ආනත වූ ද එක සමාන රළු වූ ද ආනත කල දෙකක් මත ය. ආනත කළවල බැඳුම් එකක් අනිකට මුහුණ ලා ඇති අතර දඬුවල කලය පිරස් ය. BAC කෝණය 2θ ද B හා C දෙකෙළවරේ දී ම කර්ණය කෝණය β ද වට දඬු පිමාකාරී සම්තුලිතතාවෙන් සටහිනි. තන්තුවේ T ආතතිය

$$T = \frac{1}{2} W \tan \theta + W \tan (\beta - \alpha)$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

A සන්ධියේ දීත් B කෙළවරේ දීත් AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. තව ද

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\cos \theta}{\cos (\alpha - \beta)}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි P යනු එම ප්‍රතික්‍රියා දෙකේ ක්‍රියාවේ බාල දේශන ලක්ෂ්‍යය යි.

7. අරය r වූ පිහිත් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොළක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ a අරයෙන් යුත් තන ඒකාකාර අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් එහි සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

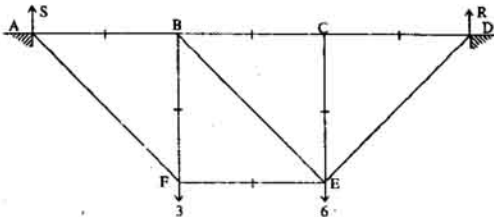
සංවෘත බදුනක්, පිහිත් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොළකින් හා එම පිහිත් ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයෙන් ම කැනු කල වෘත්ත ආධාරකයකින් සමන්විත වෙයි. මේ එක් එක් කොටසේ අරය a ට සමාන ය. බදුන සම්පූර්ණයෙන් ම ජලයෙන් පුරවා දාරයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයෙකින් එල්ල වීම, එහි ආධාරකය යටිතල පිරසට θ කෝණයකින් ආනතව සම්තුලිතතාවේ පවතිනි. කබොළ තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ චූෂ්ණ ගුරුත්වය කුමක් වුවද

$$\frac{1}{3} < \tan \theta < \frac{3}{8}$$

බව පෙන්වන්න.

බදුනේ බරෙන් ජලයේ බරෙන් අනුපාතය θ ඇසුරෙන් සොයන්න.

8. A හි දීත් D හි දීත් නිදහස් ලෙස ආධාරක මත පිහිටි පාලමක හේවරයක් රූපයෙන් නිරූපණය කැරෙයි. මේ රාමුවැකිල්ල සමන්විත වන්නේ යුතු දඬු තවයකිනි. ඒවා අතුරෙන් තයක්, එනම් AB, BC, CD, BF, CE හා FE දඬු එක එකක් 1 m දිග වන අතර අනෙක් දඬු කුන, එනම් AF, BE, ED එක එකක් $\sqrt{2} \text{ m}$ දිගින් යුක්ත ය. රූපයේ දක්වන පරිදි මෙවුක් වොන් 3 ක හා 6 ක භාර පිළිවෙලින් F හි හා E හි දී එල්ලා තිබෙයි. D ආධාරකයේ ප්‍රතික්‍රියාව R පිරස් බලයක් යැයි උපකල්පනය කර R සොයන්න. අනුපිළිවෙලින් D, C, E, F, B හා A සන්ධිවලට බෝ අංකනය යොද ගනිමින් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න ඒ නයින් S හි අගය සොයා දඬු සියල්ලේ ම ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර ඒවා ආකෘති ද තෙරපුම් ද යන්න වෙන් වෙන් ව දක්වන්න.



9. "සර්ෂණ කෝණය" යන පදය අර්ථ දක්වන්න.

(අ) W බරින් යුත් ඒකාකාර සහ ගෝලයක්, තිරසර α ආනතියක් සහිත, සර්ෂණ සංගුණකය μ වූ රළු තලයක් මත තිරසරව ඇත්තේ ගෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයටත් තලයටත් ඇඳූ තිරස් තත්කවන ආධාරයෙනි. $\alpha \leq 2 \tan^{-1}(\mu)$ බව පෙන්වන්න. තත්කවේ උපරිම ආනතිය සොයන්න.

(ආ) W බරින් යුත් ඒකාකාර සහ ගෝලයක් රළු තිරස් බිත්තියකට හේතුව වී තිරසරව තබා ඇත්තේ බිත්තියේ හා ගෝලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයට තිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ වූ අවල ලක්ෂ්‍යයටත් ගෝලයටත් ඇඳූ තත්කවක් මගිනි. තත්කව යටතේ තිරසර සමඟ θ කෝණයක් සාදන අතර සමතුලිතතාව පිමාකාරී අවස්ථාවේ වෙයි. λ යනු සර්ෂණ කෝණය නම් තත්කවේ ආනතිය සොයා, θ හි විවිධ අගයයන් සඳහා ආනතියේ අඩුතම අගය $W \cos \lambda$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයිත්, λ ට $\cos^{-1} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \right]$ නො ඉක්මවිය හැකි බව ප්‍රාථමික ලෙස පෙන්වන්න.

10. (අ) වේලක ස්ල මුහුණක ක්‍රමිකයමක ආකාරය ගනියි. පතුලේ සලල මීටර a වන අතර මුදුනේ සලල මීටර $a + b$ වෙයි. වේලලේ මුහුණක තිරස් ය. ස්ලය මට්ටම වේලලේ මුදුන මට්ටමට සම වන විට ස්ලයේ ගැඹුර මීටර h වෙයි.

(i) වේලල මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම් නිව්ටන $\frac{w}{6} h^2 (3a + b)$ බවත්

(ii) පීඩන කේන්ද්‍රයේ ගැඹුර මීටර $\frac{(4a + b)h}{2(3a + b)}$ බවත්

පෙන්වන්න; මෙහි w යනු kg m^{-3} වලින් වූ ස්ලයේ ඝනත්වයයි.

(ආ) තිරස් ඇඳුනක තරස්තඬු වූකලී පිළිවෙලින් පතුලේ දික් මුදුනේ දික් 1 m ද, 2 m ද වූ ක්‍රමිකයමකි. ඇලේ ගැඹුර 1 m කි. උඩු දුරයේ දී විවර්තනී කළ තිරස් දෙරස් මගින් ඇඳු වසා ඇත්තේ දෙරට ලම්බ ලෙස යටි දුරයේ මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයට තිරස් F බලයක් යෙදීයෙහි. ඇඳු ස්ලයෙන් පිරී ඇති විට,

$$F = \text{නිව්ටන } \frac{5w}{12}$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි w යනු ස්ලයේ ඝනත්වය යි.

11. a අරයෙන් යුත් සංවෘත කල වෘත්ත කෙළවර සහිත උස h වූ සාප්පුවක්ක කුහර පිලිත්වරයක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයකින් සම්පූර්ණයෙන් ම පුරවා, එහි අක්ෂය තිරසර සමඟ θ කෝණයක් සාදන පරිදි අවලව රඳවා තිබෙයි. කල කෙළවර මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම්වල, විශාලත්ව, දිශා හා ක්‍රියාවේවා සොයා, දරා සිටින ද්‍රවයේ G කේන්ද්‍රකය වටා සමාන වූද ක්‍රමිකිරුද්ධ වූද සුර්ණ ඒවාට තිබෙන බව පෙන්වන්න. ඒ නයිත්, වක්‍ර සංෂ්ඨය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම්

$$\pi a^2 h \rho g \cos \theta$$

විශාලත්වයෙන් යුක්ත බවත් එහි ක්‍රියාවේවා වෙන් අක්ෂය සාප්පුවේ ලෙස සමවිච්ඡේදනය වන බවත් පෙන්වන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන ආසිම්මික් මූලධර්මය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

නැවත බෙදෙහි යම් අවල තිරස් සලකුණක් ලකුණු කර ඇත. තිරස්වල මුහුදු ස්ලයේ නැව ඉපිලෙන විට එම සලකුණ ස්ල රේඛා කඩ හා එකම මට්ටමේ පිහිටයි. මීටදීය නැවී තරාකයක නැව ඉපිලෙන්නට සැලැස්සූ විට එය මීටර h ගිලා බසීයි. මෙවුන් ටොන් C බර බඩු ප්‍රමාණයක් ගොඩ බැ පසු සලකුණ මීටර H දුරක් ඉහළ නැගුණු බව දක්නා ලදී. ස්ල රේඛා කඩ අසල නැවේ බඳු තිරස් යැයි ද මුහුදු ස්ලයේ විශිෂ්ට ගුණිතය 1.026 යැයි ද උපකල්පනය කර, බඩු ගොඩ බැමට පෙර නැවේ සහ බඩුබාහිරාදියේ බර

මෙවුන් ගොන් $\frac{513 h C}{13 H}$

බව පෙන්වන්න.