017783

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.

---

1. තලයක චලනය වන P අංශුවක, O මූලයක් සහ Ox ආරම්භක රේඛාව අනුබද්ධයෙන්, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, θ) වෙයි. P හි ප්‍රවේග සහ ත්වරණ දෛශිකවල අරීය සහ තිර්යක් සංරචක **ප්‍රකාශ කරන්න**.

දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත O ලක්ෂ්‍යයක සවිකර ඇති කුඩා සුමට මුද්දක් තුළින් යයි. තන්තුවේ දෙකෙළවරට, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m සහ $2m$ වූ P සහ Q ඉතා කුඩා ගෝල දෙකක් සම්බන්ධ කර ඇත. PQ තන්තුව නොබුරුල්ව, සරල රේඛාවක් දිගේ, PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O හි පිහිටන පරිදි ගෝල දෙක මේසය මත තබා ඇත. ආරම්භයේ දී P ගෝලයට, මේසය දිගේ, තන්තුවට ලම්බ V ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හි දිග r ද, OP හැරී ඇති කෝණය θ ද වෙයි.

P අංශුවට, තිර්යක් දිශාවට චලිත නියමය යෙදීමෙන් $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{aV}{r^2}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ලියා දක්වා $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 = \dfrac{V^2}{3}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)$ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ඒ නයින්, Q ගෝලය $\dfrac{3a}{V}$ කාලයකට පසුව O කරා ළඟාවන බව පෙන්වා, මෙම මොහොතේ P හි ප්‍රවේගයේ සංරචක සොයන්න.

Q ගෝලය, O මුදුවේ රැඳෙයි නම් සහ තන්තුව නොකැඩෙයි නම්, එම මොහොතේ තන්තුවේ ආවේගී ආතතිය $\dfrac{mV}{2}$ බවත්, පසුව සිදුවන P ගෝලයේ චලිතයේ දී තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{mV^2}{8a}$ බවත් පෙන්වන්න.

2. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල සුමට කුහර ගෝලයක **ඇතුළත** පහත් ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති P අංශුවක්, $2ga < u^2 < 5ga$ වන පරිදි වූ u වේගයෙන් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; OP රේඛාව θ කෝණයකින් හැරී ඇතිවිට අංශුව තවම ගෝලයේ පෘෂ්ඨය සමග ස්පර්ශ වී ඇත්නම් එහි වේගය සොයන්න. තිරස සමග $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{u^2 - 2ga}{3ga}\right)$ සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවකට උඩු අතට චලනය වෙමින් තිබිය දී, $v = \sqrt{\dfrac{u^2 - 2ga}{3}}$ වේගයෙන් අංශුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

ඉන් පසුව, ගුරුත්වය යටතේ කෙරෙන නිදහස් චලිතයේ දී අංශුව, ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් $\tan^2\alpha = 2$ බවත්, $u^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right) ga$ බවත් පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. අංශුවක ප්‍රවේගය $\mathbf{u}$ සිට $\mathbf{v}$ දක්වා වෙනස් කරන $\mathbf{I}$ ආවේගයක් නිසා අංශුවේ ඇතිවන චාලක ශක්ති වෙනස $\mathbf{I} \cdot \left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

A සුමට ගෝලයක් තිරස් අප්‍රත්‍යාස්ථ සුමට ගෙබිමක නිශ්චල ව, එහෙත් චලනය වීමට නිදහස ඇතිව, තබා ඇත. A ට සර්වසම වූ B ගෝලයක් තිරස් ව පහළට u වේගයෙන් වැටෙන අතර A ගෝලය සමග ගැටෙන්නේ, ගැටුම් මොහොතේ දී ගෝලවල කේන්ද්‍ර රේඛාව තිරස සමග α කෝණයක් සාදන පරිදි ය. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. සංසට්ටනය සම්බන්ධයෙන්, පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න:

(i) ගෝල දෙක අතර ආවේගය $\dfrac{(1 + e)\, mu \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ වෙයි.

(ii) සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය $\left(1 - e^2\right) \dfrac{mu^2}{2} \left(\dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}\right)$ වෙයි.

(iii) ගෙබිමෙන් ඇති කරන ආවේගය $(1 + e)\, mu \left(\dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}\right)$ වෙයි.

ගෙබිමෙන් ආවේගය නිසා චාලක ශක්ති හානියක් සිදු නොවන්නේ ඇයි?

4. ස්කන්ධය M සහ අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියකට, එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන, එහි තලයට අභිලම්බ අචල තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තැටියේ දරය මත එහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයේ තබනු ලැබේ. අංශුව සහ තැටිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට යන්තම් විස්ථාපනය කෙරෙන අතර, t කාලයේ දී තැටිය හැරෙන කෝණය θ වේ. අංශුව සහ තැටිය අතර සාපේක්ෂ චලිතයක් නොමැතිනාක් කල්

$$(M + 2m)\, a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\, mg\, (1 - \cos\theta) \quad \text{බව පෙන්වා}$$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

තැටියෙන් අංශුව මත ක්‍රියා කරන බලයෙහි ස්පර්ශක සංරචකය, $F = \dfrac{M\, mg \sin\theta}{M + 2m}$ බව පෙන්වා එම බලයේ අරීය සංරචකය සොයන්න. අංශුව තැටිය සමග ස්පර්ශය නැතිවීමට පෙර අංශුව ලිස්සන බව අපෝහනය කර, ලිස්සීම සිදුවන විට θ හි අගය සඳහා සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

5. ස්කන්ධය m සහ දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර හරහා යන AB ට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\dfrac{4\, ma^2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩේ A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට විවර්තනය කර, AB තිරස් ව තිබිය දී නිශ්චලතාවයේ සිට දණ්ඩ මුදා හරිනු ලැබේ. එය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට $a\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dfrac{3g}{2} \sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

එම මොහොතේ දී, A හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දණ්ඩ දිගේ සංරචකය සොයන්න.

AB සිරස් වන මොහොතේ දී A කෙළවර විවර්තනියෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ, දණ්ඩෙහි පසුව සිදුවන චලිතයේ දී එහි G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පථය සොයන්න.

දණ්ඩෙහි ප්‍රථම සිරස් පිහිටීම ඇති මොහොතේ සිට $\pi\sqrt{\dfrac{2a}{3g}}$ කාලයකට පසු AB නැවත ක්ෂණික ව සිරස් පිහිටීමකට පැමිණෙන බව ද, මෙම කාලයේ දී G චලනය වන තිරස් දුර πa බව ද පෙන්වන්න.

6. (අ) මල්ලක් තුළ, වර්ණයෙන් හැර අනික් හැම ලෙසින් ම සර්වසම වූ බෝල 5 ක් අඩංගු වේ. ඒවායින් දෙකක් සුදු පාට ද, තුනක් කළුපාට ද වේ. සුදු බෝල දෙකම ලැබෙන තුරු වරකට එක බැගින්, සසම්භාවීව, ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව, මල්ලෙන් බෝල ඉවතට ගනු ලැබේ.

X සසම්භාවී විචල්‍යය, "සුදු බෝල දෙකම ලැබීම සඳහා ඉවතට ගැනීමට අවශ්‍ය වාර ගණන" නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න. X හි මධ්‍යන්‍ය අගය 4 බව පෙන්වා X හි සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(ආ) දුනුවායෙක්, ඉලක්ක ලැල්ලක හරි මැද වෙත ඊයක් විදීමට පුරුදු වෙයි. එක් එක් උත්සාහය සඳහා ස්වායත්ත ව, හරි මැදට විදීමට (සාර්ථකත්වයට) ඔහුගේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{5}$ වෙයි. ඔහුගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වය ලැබෙන්නේ

(i) ඔහුගේ දෙවැනි උත්සාහයේ දී,

(ii) ඔහුගේ තෙවැනි උත්සාහයේ දී,

(iii) ඔහුගේ සිව්වැනි උත්සාහයේ දී

වීමේ සම්භාවිතාව, දශමස්ථාන තුනකට, සොයන්න.

"දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථක උත්සාහයත් ඇතුළුව ඒ දක්වා ඔහු කරන උත්සාහ ගණන", Y යැයි ගනිමු. Y විචල්‍යය, සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(Y = r) = \left(\frac{4}{5}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{5}\right), \quad r = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

සහිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$(1 - q)^{-2}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය උපකල්පනය කරමින්, Y හි මධ්‍යන්‍ය අගය 5 බව පෙන්වන්න. දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වයට කලින් අසාර්ථක උත්සාහ අඩු වශයෙන් හතරක් වත් තිබීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0·41 බවත් පෙන්වන්න.

7. E නම් කාර්යාලීය දුරකථන හුවමාරුවකට මිනිත්තුවක දී ලැබෙන ඇමතුම් ගණන, X, මධ්‍යන්‍යය μ වූ පොයිසෝන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන අතර X හි සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(X = r) = \frac{e^{-\mu}\mu^{r}}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

වෙයි.

පැය 10 කින් යුක්ත සෑම වැඩ කරන දිනක දී ම E වෙත සාමාන්‍යයෙන් ඇමතුම් 240 ක් ලැබෙන බව දී ඇත්නම් μ හි අගය සොයා මෙම මධ්‍යන්‍යය සඳහා පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) මිනිත්තු තුනක කාල ප්‍රාන්තරයක දී බොහෝදුරට ලැබිය හැකි ඇමතුම් සංඛ්‍යාව 1 ක් වේ.

(ii) මිනිත්තු t කාල ප්‍රාන්තරයක දී අඩුම වශයෙන්, එක් ඇමතුමක් වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $1 - e^{\frac{-2t}{5}}$ වේ.

Y සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක්,

"E හුවමාරුව වෙත ලැබෙන අනුගාමී දුරකථන ඇමතුම් දෙකක් අතර කාල ප්‍රාන්තරය" වශයෙන් අර්ථ දක්වෙයි.

Y හි සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

Y හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $\frac{2}{5}e^{\frac{-2t}{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුගාමී ඇමතුම් දෙකක් අතර මධ්‍යන්‍ය කාලය ගණනය කරන්න.

E හුවමාරුවේ ක්‍රියාකරුට ගෙවුණු මිනිත්තු තුනේ දී ඇමතුම් කිසිවක් නොලැබුන බව දී ඇත්නම්, ඇමතුමක් අත් නොහැරෙන පරිදි ඊළඟ මිනිත්තු පහ සඳහා ඔහුට හුවමාරුවෙන් බැහැරව සිටිය හැකි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. (අ) "ශුද්ධ බර 250 g" ලෙස ලේබල් කර ඇති ඇසුරුම් තුළට යන්ත්‍රයකින් තේ පුරවනු ලැබේ. ඇසුරුම් 5000 ක ඇණවුමක අඩංගු තේ වල මුළු බර 1275 kg වෙයි. තේ ඇසුරුම් වල ශුද්ධ බර, සම්මත අපගමනය 2 g සහිත ව, ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත්නම් මෙම ඇණවුමෙහි

(i) 250 g ට අඩු බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

(ii) හරියටම 250 g බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

සොයන්න.

(ආ) බහුවරණ පරීක්ෂණ පත්‍රයක ප්‍රශ්න 50 ක් අඩංගු ය. අපේක්ෂකයෙකු එක් එක් ප්‍රශ්නයට දී ඇති, හිඟිය හැකි, පිළිතුරු තුනකින් එකක් යටින් ඉරක් ඇඳ නිවැරදි බව දැක්වීම අවශ්‍ය ය. එක් එක් ප්‍රශ්නයට එක පිළිතුරක් පමණක් නිවැරදි වන අතර එවැනි පිළිතුරක් සඳහා අපේක්ෂකයෙකුට එක ලකුණක් ලැබේ. මුළුමනින් ම නූගත් අපේක්ෂකයෙක් සසම්භාවී ලෙස පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳියි. X සසම්භාවී විචල්‍යය, "ඔහු විසින් නිවැරදි ව යටින් ඉරි ඇඳි පිළිතුරු ගණන" ලෙස ගනිමු. X අනුගමනය කරන ද්විපද ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.

සමත් වීමේ ලකුණ 20 වෙයි නම්, මෙම ද්විපද ව්‍යාප්තිය සඳහා ප්‍රමත සන්නිකර්ෂණයක් යෙදීමෙන්, ඔහු මෙම පරීක්ෂණය සමත්වීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0·1977 බව පෙන්වන්න.

9. නියත m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට, සිරස් ව පහළට, U වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එය ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන්නේ අංශුවේ වේගය v වනවිට mkv ප්‍රතිරෝධයක් ඇති කරන මාධ්‍යයක් තුළ ය. මෙහි k නියතයකි. P අංශුවේ වේගය U කෙරෙන් ස්වායත්ත සීමාවකට ළඟාවන බව පෙන්වන්න.

t කාලයක දී P අංශුව වැටෙන දුර

$$\frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(U - \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right)$$

බවත් පෙන්වන්න.

P හි ප්‍රක්ෂේප මොහොතේ සිට T කාලයකට පසුව P ට සර්වසම Q අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේම සිට, සිරස් ව පහළට, V වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අවසානයේ දී ($t \to \infty$ එළඹෙන විට) අංශු දෙක අතර දුර $\frac{1}{k}(U - V + gT)$ බව පෙන්වන්න.

අවසානයේ දී Q ට සාපේක්ෂ ව P හි ප්‍රවේගය කුමක් ද?

10. $\mathbf{F}$ බලයක ක්‍රියා රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන අතර, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හි පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{a}$ වෙයි. O ලක්ෂ්‍යය වටා $\mathbf{F}$ බලයෙහි දෛශික ඝූර්ණය අර්ථ දක්වා, එහි විශාලත්වය සහ දිශාව පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

බල පද්ධතියක් සමන්විත වන්නේ, O මූලය හරහා ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ සහ $\mathbf{F}_3 = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බල සමඟින් තවත් බල දෙකකිනි. ඒවා නම්, පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ වූ A ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන, λ නියතයක් වූ, $\mathbf{F}_4 = \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බලයක් සහ පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{b} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ වූ $\mathbf{B}$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_5 = -7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ බලයක් වේ. මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ මගින් පිළිවෙළින් Ox, Oy, Oz සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසීය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික දක්වයි.

මෙම පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{R}$ බලයක් සමඟින් ඝූර්ණය $\mathbf{G}$ වූ යුග්මයකට ඌනනය කළේ නම් $\mathbf{R}$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා

$$\mathbf{G} = -4\mathbf{i} + (2\lambda + 14)\mathbf{j} + (\lambda + 9)\mathbf{k}$$

බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය, $\mathbf{F}$ තනි බලයකට ඌනනය වන පරිදි λ හි අගය නිර්ණය කරන්න. එවිට $\mathbf{F}$ සොයා එහි ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය μ පරාමිතියක් වූ, $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.