සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 18174

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I
(02) Applied Mathematics I

විෂය අංකය		
02	S	I

පැය තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O, A, B යනු $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ වන අයුරින් එකම සරල රේඛාවක් මත නොපිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. P සහ Q යනු $\overrightarrow{OQ} = \frac{\mathbf{a}}{2}$ සහ $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{a}|\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ වන අයුරින් වූ ලක්ෂ්‍ය වේ. $\overrightarrow{OP}$ සහ $\overrightarrow{PA}$, $\mathbf{a}$ සහ $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, $\mathbf{b} = \frac{|\mathbf{b}|\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA})}{|\mathbf{a}|}$ බව අපෝහනය කරන්න.

   R යනු $AR : RB = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}|$ වන අයුරින් AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යයි දී ඇත්නම් $\overrightarrow{OR}$ සොයන්න. ඒ නයින්
   (i) O, P, R එකම සරල රේඛාව මත පිහිටන බවත්,
   (ii) $2\,|\overrightarrow{OP}| > |\overrightarrow{OR}|$ බවත්, පෙන්වන්න.

2. (i) $\mathbf{a}$ සහ $\mathbf{b}$ දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.
   (ii) $\mathbf{a}$ සහ $\mathbf{b}$ යනු නිශ්ශුන්‍ය, සමාන්තර නොවන සහ $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} = 0$ වන දෛශික දෙකක් නම් $\alpha = 0$, $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න.
   ABC ත්‍රිකෝණයක B, C කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක O හිදී හමු වේ. O ලක්ෂ්‍යය දෛශිකයන්ගේ මූලය ලෙස ගනිමින් $\overrightarrow{OB}$ සහ $\overrightarrow{OC}$,

   $$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{c} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{a}\right)$$

   $$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = \mu\left(\frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{a} + \frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{b}\right)$$

   ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි λ, μ අදිශ වන අතර a, b, c යනු ත්‍රිකෝණයේ පාද වේ.

   $$\lambda^{-1} = -\frac{a+b+c}{ac}, \quad \mu^{-1} = -\frac{a+b+c}{ab}$$

   බව පෙන්වන්න.
   ඒ නයින් කෝණ සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

3. A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්

   $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\,\mathbf{k}$
   $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\,\mathbf{k}$
   $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\sqrt{2}\,\mathbf{k}$ වේ.

   (i) A, B සහ C මගින් නිර්ණය කරන ලද තලයට ප්‍රලම්බ ඒකක අභිලම්බ දෛශිකයක්,
   (ii) A, B, සහ C මගින් නිර්ණය කරන ලද තලය සඳහා සමීකරණයක්
   (iii) $\overrightarrow{AB}$ සහ $\overrightarrow{AC}$ අතර කෝණය
   (iv) A, B සහ C ශීර්ෂයන් වන ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය
   සොයන්න.

4. ඒකතල බල n වලින් යුත් පද්ධතියක i වෙනි බලයේ සංරචක සෘජු කෝණාශ්‍රාකාර අචල අක්ෂ යුගලයක දිශාවන්හි (X_i, Y_i) වන අතර එහි යෙදුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ වේ. පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වේ නම් මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$ax + by + c = o$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි

$$a = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ , \ b = - \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{සහ}$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} (y_i X_i - x_i Y_i) \quad \text{වේ.}$$

P, Q යනු නියතයන් සහ θ යනු පරාමිතියක් වන $(P\cos \theta, \ P\sin \theta)$ සහ $(- Q \sin \theta \ , \ Q \cos \theta)$ විචල්‍ය බල දෙකක් පිළිවෙලින් $(a, 0)$ සහ $(- a, 0)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරනු ලැබේ. පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න. රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

5. දෘඩ වස්තුවක් සියල්ල ම සමාන්තර නොවූ ක්‍රියා රේඛාවන් සහිත ඒකතල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතී නම් එවිට ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා ඒක ලක්ෂ්‍ය විය යුතු බව පෙන්වන්න.

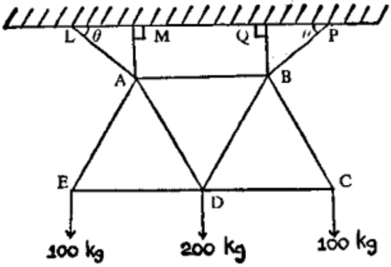
අරය $\sqrt{3}\ a$ වන සුමට අර්ධ ගෝලාකාර අචල පාත්‍රයක ගැටිය උඩින් යන දිග $4a$ වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක් එක කෙළවරක් පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් නිසලව ඇත. පාත්‍රයේ ගැටිය තිරස්ව පිහිටයි නම් තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය රේඩියන $\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

6. එක එකක දිග $2a$ සහ බර W වන AB, BC සහ CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B සහ C හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. BC තිරස්ව ද AB හා CD එක එකක් සුමට අචල නාදන්තක ආධාරය ඇතිව ද පද්ධතිය සමතුලිත ව නිසලතාවේ ඇත. එකිනෙකට $2c$ දුරකින් එකම තිරස් මට්ටමක නාදන් පිහිටා ඇත. AB සිරසට

α කෝණයකින් ආනත වන බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\sin \alpha = \left[\dfrac{3\,(c - a)}{2a} \right]^{\frac{1}{3}}$ වේ.

B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එය තිරස සමග $\tan^{-1} [\frac{1}{3} \tan \alpha]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

7.



A, B, C, D, E හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද සමාන සැහැල්ලු දඬු හතකින් යුත් $ABCDE$ රාමුසැකිල්ලක් රූපය විස්තර කරයි. C, D, E සන්ධිවලට පිළිවෙලින් බර 100 kg, 200 kg, 100 kg වූ භාරයන් තුනක් ඇඳා ඇති අතර පිළිවෙලින් A සහ B හරහා යන LAM, PBQ සමාන සැහැල්ලු සුමට තන්තු දෙකක් මගින් රාමු සැකිල්ල සිලිමෙහි එල්ලා ඇත්තේ AB තිරස් වන අයුරිනි. තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

ප්‍රත්‍යාබල රූපයක් සටහන් කර දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, θ කෝණය ඇසුරෙන් සොයන්න.

$\theta \leqslant 30^\circ$ නම් AB දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය අනෙක් දඬුවල ප්‍රත්‍යාබලවලට වඩා වැඩි වන බව පෙන්වන්න.

8. අරය සෙන්ටිමීටර r වූ ද, බර නිව්ටන W වූ ද ඒකාකාර ගෝලයක ස්වකීය පෘෂ්ඨය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ඇඳා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර සිරස් රළු බිත්තියක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. අචල ලක්ෂ්‍යයට පහළින් සෙන්ටිමීටර $\frac{3r}{2}$ දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී බිත්තිය ස්පර්ශ කරමින් ගෝලය සමතුලිතව නිසලතාවේ ඇත. බිත්තිය සමග ගෝලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය යටි අතට ලිස්සා යෑමට සූදානමේ ඇත්නම් හා ගෝලය සහ බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{3}{4}$ නම් සිරසට තන්තුවේ ආනතිය සොයන්න.

තන්තුවේ ආතතිය නිව්ටන $\dfrac{5W}{6}$ බව පෙන්වන්න.

9. $y^2 = 4ax$ සහ $x = a$ ප්‍රස්තාර මගින් සපර්යන්ත පෙදෙස x — අක්ෂය වටා පරිභ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඒකාකාර ඝනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $\left(\dfrac{2a}{3}, 0 \right)$ හි පිහිටන බව පෙන්වන්න.

බර $9W$ වන එවැනි ඝනයක් බර $4W$ සහ අරය $2a$ වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ ඝනයේ තල මුහුණත අර්ධ ගෝලයේ තල මුහුණත සමග සම්පාත වන අයුරිනි. අර්ධ ගෝලයේ වක්‍රාකාර පෘෂ්ඨය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන ලෙස එලිත ඝනයට සමතුලිතව නිසලතාවේ පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න.

10. පැත්තක් a වන විවෘත ඝනකාකාර ටැංකියක් සම්පූර්ණ ලෙස, ඝනත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. පැත්තක් a වන $ABCD$ නම් සමචතුරශ්‍ර පියනකින් ටැංකිය වසා ඇත. පියන AB ඔස්සේ නිදහස් ලෙස අසව්කර ඇති අතර CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන E ලක්ෂ්‍යයේ දී සවිකර ඇත.

(i) ටැංකිය ස්වකීය $ABCD$ පියන තිරස්ව සහ පහළින්ම සිටින සේ තබා ඇත්නම් E හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

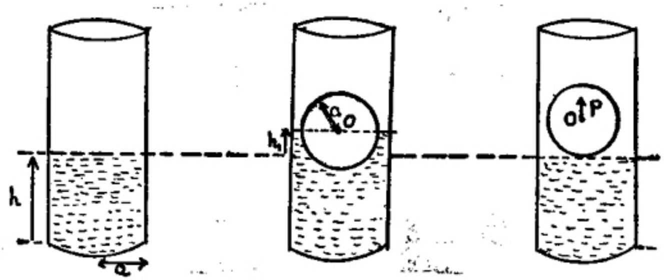
(ii) ටැංකිය AB තිරස්ව සහ පියන සිරස්ව (AB ට පහළින් CD) සිටින සේ තබා ඇත්නම් E හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

11. අරය a වන සැහැල්ලු සංවෘත අර්ධ වෘත්තාකාර පාත්‍රයක් සම්පූර්ණ ලෙස ඝනත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. එය ස්වකීය වෘත්තාකාර දාරයේ, ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇත. එහි තල මුහුණත සිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ කෝණයකින් ආනත වන බව ද ස්වකීය වෘත්තාකාර මුහුණත මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම $\frac{8}{\sqrt{73}}\pi a^3\rho g$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් බව ද පෙන්වන්න.

ද්‍රවයේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රය වන O සිට $\frac{a}{4}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ද්‍රවයේ වැඩිතම පීඩනය කුමක් ද?

12.



රූපය 1 රූපය 2 රූපය 3

අරය a වන සිලින්ඩරාකාර සරාවක් (රූපය 1) h ($> \frac{1}{3}a$) උසකට ඝනත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. ශූන්‍ය ශක්ති මට්ටම පතුල ලෙස ගෙන ඒ අනුබද්ධයෙන් ද්‍රවයේ විභව ශක්තිය

$\frac{1}{2}\pi a^2 h^2 \rho g$ බව පෙන්වන්න.

සරාව තුළට දමන ලද අරය a වන ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් (රූපය 2) ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨයෙන් අඩක් ද්‍රවයෙන් ඉහළ සිටින සේ ඉපිලෙයි. $h_1 = \frac{2}{3}a$ මගින් දෙනු ලබන h_1 උසකින් ද්‍රව මට්ටම ඉහළ නගින බව පෙන්වන්න.

ද්‍රවයේ විභව ශක්තියේ වැඩිවීම $\frac{\pi a^4}{36}\rho g$ බව පෙන්වන්න.

ගෝලයේ m ස්කන්ධය සොයා එය ද්‍රවයෙන් යන්තමින් ඉවත්ව යන සේ (රූපය 3) එසවීමේ දී කෙරෙන කාර්‍ය $\frac{7}{24}mga$ බව පෙන්වන්න.