සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 19611

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

විෂය අංකය		
02	S	II

පැ තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $x = 0$ විට $y = 0$ යයි දී ඇති විට $\dfrac{dy}{dx} = -e^{x+y}$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම සොයන්න.

(ii) $\dfrac{dy}{dx} - y \ln x = 0$ අවකල සමීකරණය විසඳා

$x = 1$ හි දී $y = 1$ අවශ්‍යතාව සපුරා ලන ව්‍යක්තික විසඳුම සොයන්න.

(iii) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y} + \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1}$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

එය සමනාභික පරාවල කුලයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

$\left[\int \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln\left(\sqrt{1+u^2} - u\right) \right.$ ප්‍රතිඵලය ඔබට උපයෝගී කර ගත හැක. $\left.\right]$

2. A ට මීටර් 380 ක් ඈතින් B ද B ට කිලෝමීටර් 1.96 ක් ඈතින් C ද වන අයුරින් ඍජු ධාවන පථයක් මත A, B, C කණු තුනක් පිහිටා ඇත. ඒකාකාර ත්වරණයකින් චලනය වන X නම් රථයක් A සිට B ට ගමන් කිරීමට මිනිත්තු 1 ක් ද B සිට C ට ගමන් කිරීමට මිනිත්තු 2 කක් ද ගනී. එහි ත්වරණය තත්පරයට තත්පරයට මීටර් වලින් සොයා C හි දී එහි වේගය තත්පරයට මීටර් 23 ක් බව පෙන්වන්න.

තත්පරයට තත්පරයට මීටර් $\frac{1}{5}$ ක ඒකාකාර ත්වරණයෙන් චලනය වන Y නම් දෙවෙනි රථයක් X ට වඩා තත්පර 10 යක් කලින් C පසුකර යනු ලබන අතර එවිට එහි වේගය තත්පරයට මීටර් $\frac{109}{7}$ වෙ. Y පසුකර X යන්නේ කොතැන දී දැයි සොයන්න.

3. ස්කන්ධයන් පිළිවෙලින් m, සහ M වන P සහ Q අංශු එක එකක් u වේගයෙන් O ලක්ෂ්‍යයක සිට ආරම්භකර සරල රේඛාවක් ඔස්සේ චලනය වේ. O දෙසට දිශාව ගත $\lambda > 0$ නියතයක් වන λm බලයක් P මත ක්‍රියා කරනු ලබන අතර O දෙසට ම වූ $\mu M y$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් Q මත ක්‍රියා කරනු ලැබේ ; මෙහි $\mu > o$ නියතයක් සහ y යනු O සිට Q ට ඇති දුර වේ. O දෙසට ආපසු ආරම්භ කිරීමට ප්‍රථම P සහ Q දෙකම එකම a දුරක් පිළිවෙලින් t_P සහ t_Q කාලවලින් සම්පූර්ණ කරයි නම්

$$t_P : t_Q = 4 : \pi \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

O සිට b දුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් පසු කරන විට P සහ Q හි වේග පිළිවෙලින් v_P සහ v_Q නම් එවිට

$$v_P : v_Q = \sqrt{a} : \sqrt{a+b} \text{ බව ද පෙන්වන්න.}$$

P සහ Q දෙකම O සිට පිටත්වීම හා O ට ආපසු පැමිණීම අතර එකම කාලයක් ගනී නම් O සිට ඒවායේ උපරිම දුරවල අනුපාතය සොයන්න.

4. තිරස් සුමට මේසයක් මත සිටුවා ඇති කුඤ්ඤයක සුමට බෑවුම් මුහුණත සමග ස්කන්ධය m වන අංශුවක් ස්පර්ශව පවතී. කුඤ්ඤයේ ස්කන්ධය M වන අතර බෑවුම් මුහුණත තිරසට α කෝණයකින් ආනත වේ.

පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරී නම් කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\dfrac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$ බව පෙන්වන්න.

කුඤ්ඤයේ මුහුණත ඔස්සේ s දුරක් අංශුව චලනය වන කාලය තුළ දී කුඤ්ඤය d දුරක් චලනය වේ නම්

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) d = s \cos \alpha$$ බව පෙන්වන්න.

කුඤ්ඤය සහ මේසය අතර ප්‍රතික්‍රියාව

$$\frac{M(M+m)g}{M + m \sin^2 \alpha}$$ බව ද පෙන්වන්න.

5. ස්වකීය එන්ජිම කිලෝවොට් P වලින් ක්‍රියාකරවමින් පැයට කිලෝමීටර u නියත වේගයෙන් ස්කන්ධය කිලෝග්‍රෑම් M වන රථයක් තැනිතලා මාර්ගයක චලනය වේ. රථය නිව්ටන R නියත ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වේ නම් $R = 3600\, Pu^{-1}$ බව පෙන්වන්න.

එන්ජිම දැන් අසම්බද්ධ කර තිරිංග යොදනු ලබන අතර මීටර s දුරක දී රථය නිශ්චලතාවට පැමිණේ. මුළු ප්‍රතිරෝධය ඒ අයුරින්ම පවතී යයි උපකල්පනය කරමින් තිරිංගවල මන්දන බලය

$$\left(\frac{25}{648}\right) M s^{-1} u^2 - 3600\, Pu^{-1}$$ බව පෙන්වන්න.

එන්ජිම නවමත් අසම්බද්ධව ඇත්නම් එම ප්‍රතිරෝධයම සහ තිරිංග බලය ක්‍රියා කරන විට පැයට කිලෝමීටර u වලින් ආරම්භ කරමින් ක්ෂණිකව නිසලවීමට පළමුව රථය ආනතිය $\sin^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$ වූ කන්දක $25\, csu^2\, (25\, cu^2 + 648\, gs)^{-1}$ දුරක් ඉහළට දුවන බව පෙන්වන්න.

6. නැවක් පැයට කිලෝමීටර් 30 කින් බටහිරට යාත්‍රා කරන අතර දෙවන නැවක් පැයට කිලෝමීටර් 20 කින් දකුණට යාත්‍රා කරයි. පළමු නැවේ නාවිකයන්ට තුන්වෙනි නැවක් ගිනිකොන දිශාවේ යාත්‍රා කරන්නා සේ පෙනෙන අතර දෙවෙනි නැවේ නාවිකයන්ට එය උතුරෙන් බටහිරට 60° ක දිශාවේ යාත්‍රා කරන්නා සේ පෙනේ. තුන්වෙනි නැව දකුණෙන් බටහිරට 75° දිශාවේ යාත්‍රා කරන බව පෙන්වා එහි වේගය සොයන්න.

7. සමාන අරයන්ගෙන් යුත් A, B සහ C ගෝල තුනක ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m, $2m$ සහ $3m$ වේ. ගෝල, A සහ C අතර B සිටින සේ ද ඒවායේ කේන්ද්‍ර සරල රේඛාවක සිටින සේ ද තිරස් සුමට මේසයක් මත නිශ්චලතාවයේ පවතී. කේන්ද්‍රයන්ගේ රේඛාව ඔස්සේ B දෙසට A ගෝලයට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. ගෝල එක් එක් යුගලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම්

(i) B සමඟ ගැටුනු වහාම A හි වේගය සහ

(ii) C සමග ගැටුනු වහාම B හි වේගය සොයන්න.

$e > \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ නම්, B සමග A දෙවන වරකට නොගැටෙන බව පෙන්වන්න.

8. නො ඇදී දිග l සහ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය W වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් බර W වන P අංශුවක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. විස්තාරය $2a$ වන සිරස් දෝලන P විසින් සාදනු ලබයි නම් t කාලයේ දී O සිට එහි දුර $2\left(l + a \sin t \sqrt{\dfrac{l}{g}}\right)$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි කාලය මැන ඇත්තේ P ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ ඇති මොහොතේ සිට වේ.

ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ සිට අංශුව ඉහළ නගින විට එය සමාන බරින් යුත් වෙනත් අංශුවක් අහුලා ගනී නම් දෝලනයේ විස්තාරය $\sqrt{l^2 + 2a^2}$ වන බව ද පෙන්වන්න.

9. ගොල්ෆ් පන්දුවකට පහර දෙනු ලබන්නේ එය තිරසට රේඩියන θ ආරෝහණයක් ඇතිව තත්පරයට මීටර u වේගයෙන් පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයකින් පිටත්වන ලෙසට ය. පන්දුවේ තිරස් පරාසය $g^{-1} u^2 \sin 2\theta$ බව ද එළඹෙන උපරිම උස $\frac{1}{2} g^{-1} u^2 \sin^2 \theta$ බව ද පෙන්වන්න.

P හා එකම මට්ටමේ පිහිටි තණ නිල්ලක් මත පන්දුව වැටේ නම් ද පන්දුව තණ නිල්ලට වැටිය හැකි ආසන්නතම සහ දූරතම ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් P හි සිට මීටර් $\dfrac{\sqrt{3}}{2} g^{-1}u^2$ සහ මීටර් $g^{-1}u^2$ නම ද $\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

තණනිල්ල මතම වැටෙන පරිදි පන්දුව වැටේ නම් පන්දුවට සේන්දු විය හැකි උපරිම උස සොයන්න.

10. දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් R නම් කුඩා සුමට අචල මුදුවක් තුළින් ගමන් කරයි. ස්කන්ධයන් m සහ λm $(\lambda > 1)$ වන P සහ Q අංශූන් තන්තුවේ කෙළවරට ගැට ගසා ඇත. කේන්ද්‍රය ලෙස ඇති C ලක්ෂ්‍යයක් වටා ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක් ගෙවා යයි. R ට සිරස් ලෙස පහළින් C පිහිටයි නම් හා C හි දී Q නිශ්චලතාවේ පවතී නම්

(i) $\omega^2 = \dfrac{g(1 + \lambda)}{l}$ සහ

(ii) තන්තුව මුදුව මත $mg\sqrt{2\lambda(1 + \lambda)}$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් යොදන බව පෙන්වන්න.

11. ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් අභ්‍යන්තර අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වන අචල කුහර ගෝලයක සුමට අන්තඃ පෘෂ්ඨය මත සිරස් වෘත්තයක චලනය වේ; වෘත්තයේ තලය O හරහා යනු ලැබේ. අංශුව u තිරස් ප්‍රවේගයකින් ගෝලයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. OP රේඛාව උඩු සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය v ද අංශුව සහ ගෝලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්

$$v^2 = u^2 - 2ag\,(1 + \cos\theta) \quad \text{සහ}$$

$$R = \frac{m}{a}\left\{u^2 - ag\,(2 + 3\cos\theta)\right\}$$

බව පෙන්වන්න.

$u^2 = (2 + \sqrt{3})\,ag$ නම් $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ තැන දී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන බව ද එහි පරාවක්‍රය O හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය M සහ පාදයක් $2a$ වන ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර තහඩුවක දරයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{4Ma^2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

ස්කන්ධය M සහ පාදයක් $2a$ වන ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර තහඩුවකට, තහඩුවේ දරයක් ඔස්සේ යන අචල සුමට තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇත. තහඩුව නිශ්චලතාවේ එල්ලී ඇති විට තහඩුවේ තලයට ලම්බ දිශාවකට $\sqrt{20ag}$ ප්‍රවේගයෙන් චලනය වන ස්කන්ධය $\frac{M}{3}$ වන අංශුවක් ස්වකීය කේන්ද්‍රකයේ දී තහඩුවේ වදින අතර එය තහඩුව තුළට කාවදියි.

(i) තහඩුව සමග වැදුනු වහාම අංශුවේ වේගය $\sqrt{\frac{4ag}{5}}$ බව ද,

(ii) ගැටුම නිසා චාලක ශක්තියේ භාගික හානිය $\frac{4}{5}$ බව ද,

(iii) ක්ෂණිකව නිසලතාවට පැමිණීමට පෙර තහඩුව රේඩියන $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකින් හැරෙන බව ද පෙන්වන්න.