

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන වසාද සහතික පත්‍ර (උසස් මට්ටම) විභාගය, අප්‍රේල් 1990 (විශේෂ-1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special-1991)

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02	
S	II

පැය තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \sin y$$

- (ii) $x - y = v$ ආදේශය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණය විසඳන්න. මෙහි v යනු x හි ශ්‍රිතයකි.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x - y + 1}$$

- (iii) $y = vx$ ආදේශය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණය විසඳන්න. මෙහි v යනු x හි ශ්‍රිතයකි.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

විසඳමින් නිරූපණය කෙරෙන්නේ වෘත්ත කුලකයක් බව පෙන්වන්න. මෙම වක්‍රවල දළ සටහනක් අඳින්න.

2. ගොඩනැගිල්ලක ඇති සෝපානයක් එහි පළමු මහලේ සිට මීටර h උසකින් පිහිටි ඉහළ ම මාලයට නැගෙයි. මේ සඳහා මිඩාඉ වන මුළු කාලය තත්පර T වේ. සෝපානය පළමු තත්පර $\frac{T}{3}$ තුළ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් ද ඉහළ තත්පර $\frac{T}{3}$ තුළ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ද ගොස් අවසානයේ ඒකාකාර මන්ද්‍රණයෙන් මගින් කරයි. ගොඩනැගීමේ ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

$$\text{ත්වරණය} = \text{මන්ද්‍රණය} = \frac{9h}{2T^2} \text{ තත්පර. තත්පර මීටර බිඵ පෙන්වන්න.}$$

ස්කන්ධය m වූ කාසියක් සෝපානයේ බිම මත තිබෙයි. සෝපානයේ චලිතයෙහි එක් එක් අවධියේ දී සෝපානයේ මිමක් කාසියක් අතර ඇති වන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$$h > \frac{2T^2g}{9} \text{ නම් කුමක් පිදුවේ ද?}$$

3. m ස්කන්ධය සහිත ගල්ක් O නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස උඩු අතට පුක්ෂේපණය කෙරේ. ගලෙහි චලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධය mkv බලයකට සමාන ය. මෙහි v යනු ගලේ ප්‍රවේගය වන අතර k යනු නියතයකි. O ට ඉහළින් ගලේ උසවීම උස h .

$$h = \frac{1}{k} \left[u - \frac{g}{k} \ln e \left(1 + \frac{ku}{g} \right) \right]$$

හේතුවෙන් දක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. ගල නැවත O වෙත ලඟ වන්නා වූ V වේගය

$$V + u = a \ln e \left(\frac{a + u}{a - V} \right)$$

සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. මෙහි $a = \frac{g}{k}$ වේ.

4. M ස්කන්ධය හා α කෝණය සහිත කුහැකුයක් සුමට තිරය මත සවි තබා ඇත. තිරයට α කෝණයකින් ආනත කලය දිගේ උඩු අතට m ස්කන්ධය සහිත අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. එය

$$\frac{2u(M + m \sin^2 \alpha)}{(M + m)g \sin \alpha}$$

කාලයට පසු කලය මත මුල් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යට නැවත පැමිණෙන බව පෙන්වන්න. මෙම කාලය තුළ කුහැකුය මගින් කළ දුර සොයන්න. මෙයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ගමන් මාර්ගය කුමක් ද?

5. ගති විද්‍යාවේ භාවිත කෙරෙන අන්දමට බලය, කාර්යය හා ජවය යන ඒකකවලට අදාළ නීතිවනාය, සුලය හා මොටය යන පදවල අර්ථ දක්වන්න.

පොම්පයක් මගින් විශාල වැඩකින් ජලය පොම්ප කර වැඩ මට්ටමෙන් මීටර 100 ක උසකින් පිහිටි ස්ථානයකට තත්පරයට මීටර 10 ක වේගයෙන් ජලය ලබා දෙයි. පොම්පයේ හරස්කඩය 2 cm අරයකින් යුත් වෘත්තයකි.

- (අ) තත්පරයකට ලබා දෙන ජල ප්‍රමාණයේ ස්කන්ධය,
- (ආ) එම ජල ස්කන්ධයේ වාලක ශක්තිය,
- (ඇ) එම ජල ස්කන්ධයේ වැඩි වූ විභව ශක්ති ප්‍රමාණය,

පොම්පයේ කාර්යක්ෂමතාව 80% ක් වෙයි නම්, පොම්පය ක්වෝචොට 16.5 ක ශීඝ්‍රතාවයකින් යුතුව කාර්යය කරන බව පෙන්වන්න.

$$(\pi = \frac{22}{7}, g = 10 \text{ ms}^{-2}, \text{ ජලය සහ මීටරයක් 1 000 kg ලෙස සැලකිය හැකි යි.})$$

6. පිළිවෙලින් S_1, S_2 නම් නැව් දෙකක පිහිටුම් දෛශික r_1, r_2, Oxy අක්ෂ කුලකයකට සාපේක්ෂව

$$r_1 = (1 + 4t)\mathbf{i} + 7t\mathbf{j}$$

$$r_2 = 6t\mathbf{i} + (1 + 8t)\mathbf{j}$$

යනුවෙන් දක්වෙයි. මෙහි t යනු පැයවලින් වූ කාලය වන අතර දුර මනින්නේ මිලිග්‍රෑම් සැලකුම්වලිනි. මෙම, සොයන්න.

- (අ) S_1 ට සාපේක්ෂව S_2 හි පිහිටුම් දෛශිකය,
- (ආ) S_1 ට සාපේක්ෂව S_2 හි ප්‍රවේගය,

$$S_1 \text{ හා } S_2 \text{ අතර කෙටිම දුර මිලිග්‍රෑම් සැලකුම් } \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

7. ■ ප්‍රවේගයක් සහිත ව චලනය වන A නම් ගෝලයක් නිශ්චලතාවේ තිබෙන B නම් සමාන ගෝලයක ගැටෙයි. A හා B ගෝලවල කේන්ද්‍රයා කෙරෙහි වේගය \mathbf{u} හි දිශාවට ϕ කෝණයකින් ආනත වෙයි. ගැටුමෙන් පසු A ගෝලයේ චලිතයෙහි දිශාව \mathbf{u} හි දිශාව සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.

$$(1 - e) \cot \phi = 2 \cot (\theta + \phi) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

මෙහි e යනු ප්‍රත්‍යාවර්ති සංගුණකය වෙයි.

ගෝල කේන්ද්‍ර ප්‍රත්‍යාවර්ති නම් $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ බව අපේක්ෂා කොට වාලක ශක්ති භානිය සොයන්න. මෙම පිළිතුර සනාථ කරන්න.

8. m ස්කන්ධයෙන් යුතු P අංශුවක් $m \omega^2 x$ බලයක් මගින් O ලක්ෂ්‍යයක් වෙතට ආකර්ෂණය වෙයි. මෙහි $OP = x$ ද යන නියතයක් ද වෙයි. කාලය $t = 0$ හිදී O සිට a දුරකින් පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයක දී අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදු හරිනු ලැබේ.

$$x = a \cos \omega t \text{ බවත්,}$$

P හි ප්‍රවේගය වන v දක්වන්නේ, $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$ යනුවෙන් බවත් පෙන්වන්න.

O ලක්ෂ්‍යයෙහි නිශ්චලතාවේ ඇති $2m$ ස්කන්ධය සහිත අංශුවක් සමඟ P අංශුව ගැටෙයි. අංශු දෙක හරි $3m$ ස්කන්ධයකි සංයුත වස්තුව $3m \omega^2 x$ බලයට භාජනය වෙයි. අලුත් චලිතයෙහි විස්තරය හා එහි කාලාවර්තය සොයන්න.

9. තිරයට θ කෝණයකින් u ප්‍රවේගයක් සහිත ව O ලක්ෂ්‍යයක දී අංශුවක් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. අංශුවේ පෙහෙහි වන P ලක්ෂ්‍යය පිහිටන්නේ OP රේඛාව තිරයට α කෝණයකින් ආනත වන අන්දමට ය.

$$OP = \frac{2u^2 \sin \theta \cos (\alpha + \theta)}{g \cos^2 \alpha} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

α අවල ව පිහිටයි නම් OP වැඩිතම වන්නේ

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \text{ විට බව පෙන්වා}$$

α වල වෙනස් වෙනස් අගයන් සඳහා P හි පථය සොයන්න.

10. m ස්කන්ධයැති P අංශුවක් කේන්ද්‍රයේ දිශාවට ඵල ලදී $m \omega^2 \vec{PO}$ බලයකට භාජනය වෙයි. සහක දක්වන වලික සමීකරණ ලබා ගන්න.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

මෙහි Oxy [අක්ෂ තුලකයකට අනුබද්ධයෙන් $P \equiv (x, y)$. P අංශුව $(a, 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $(0, u)$ ප්‍රවේගය සහිත ව ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. P හි පෙත ඉලිප්සයක් බව පෙන්වන්න.

- (i) ඉලිප්සය පෙත සම්පූර්ණ කිරීමට P ට ගත වන කාලයත්,
- (ii) $u > a\omega$ නම්, P හි උපරිම වේගයත් සොයන්න.

11. (අ) කේන්ද්‍රය O හා අරය a වන අඛණ්ඩ ගෝලයෙකු මුදුනෙහි ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. එය සම්තුලිත පිහිටීමෙන් සිරුවෙන් විස්ථාපනය කෙරෙයි. OP රේඛාව උඩු සිරය සමග θ කෝණයක් කැපූ විට

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta) \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

ප්‍රතික්‍රියාව R සොයා, $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ විට අංශුව ගෝලයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

(ආ) අඩු සිරස් කෝණය α වන කුහර කේතුවක් එහි අක්ෂය සිරස් ව හා ශීර්ෂය සහකට පිහිටන පරිදි තබා ඇත. කේතුවේ සුමට අත්ත: පෘෂ්ඨය මත අංශුවක් u වේගය සහිත ව අරය a වන තීරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරයි.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{ag}{u^2} \right)$$

බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m හා දිග $2a$ වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තීරස් මේසයක් ස්පර්ශ කරමින් සිරස් පිහිටීමක නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. මෙම පිහිටීමේ සිට දණ්ඩ දැන් සිරුවෙන් විස්ථාපනය කෙරේ. දණ්ඩ A හිදී ලිස්සා නොයන බව උපකල්පනය කොට කෝණික ප්‍රවේගය $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} (1 - \cos \theta)$$

යන්තෙන් දක්වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු සිරයට දණ්ඩේ ආනතිය වෙයි.

$$R \text{ අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව } \frac{mg}{4} (3 \cos \theta - 1)^2 \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

දණ්ඩ මේසයෙන් ඉවතට යයි ද?