ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු **(නව නිර්දේශය)**
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ட் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 **(New Syllabus)**

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ

අවශ්‍ය තන්හි දී ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ගන්න.

1. C ගුවන් යානයක්, l දිගැති AB ධාවන පථයක A කෙළවරට U වේගයෙන් ගොඩබැස, τ කාලයට පසු B හි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණෙයි. බිමේ ප්‍රතිරෝධය හා වාතයේ ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙළින් ගුවන් යානයේ ඒකක ස්කන්ධයට a හා bv^2 වෙයි. මෙහි v යනු ගුවන් යානයේ ප්‍රවේගය ද a, b යනු නියත ද වෙයි. t වේලාවේ දී C ගුවන් යානය A කෙළවරේ සිට x දුරකින් වන විට, ගුවන් යානයේ චලිතයේ සමීකරණය ලියන්න.

   (v, t) සහ (x, v) විචල්‍යවල අවකල සමීකරණ ලබා ගෙන

   (i) $U = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan\left(\sqrt{ab}\,\tau\right)$ බවත් (ii) $l = \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}U^2\right)$ බවත්

   පෙන්වන්න.

2. ස්කන්ධය M ද පාදයක දිග $2a$ ද වූ ඒකාකාර කුහර ඝනකාකාර පෙට්ටියක් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් බට්ටෙක් සහිත $l\,(<a)$ දිගැති සරල අවලම්බයක් පෙට්ටියේ උඩ මුහුණතේ මධ්‍යලක්ෂ්‍යයේ එල්ලා ඇත. අවලම්බය, උඩ මුහුණතේ ගැටෙන්නේ නැතිව සිරසෙන් දෙපසට ම සෘජුකෝණ සාදමින් දෝලනය වෙයි. අවලම්බය සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය T සොයන්න.
   පිළිවෙළින් ඝර්ෂණ බලය හා පෙට්ටියත් මේසයත් අතර අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව F හා R නම්,

   $\frac{F}{R} = \frac{\sin 2\theta}{\lambda + \cos 2\theta}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\lambda = 1 + \frac{2M}{3m}$

   μ යනු මේසයත් පෙට්ටියත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය විට $\mu \geq \frac{3m}{2\sqrt{M(M+3m)}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

3. t වේලාවේ දී Oxy තලයේ වූ P අංශුවක ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, θ) යැයි සිතමු. $\overrightarrow{OP}$ ඔස්සේ ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_r$ යැයි ද θ වැඩි වන දිශාවට $\mathbf{i}_r$ ට ලම්බ ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_\theta$ යැයි ද සිතමු. **සුපුරුදු අංකනයෙන්**

   (i) $\dot{\mathbf{i}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{i}_\theta$ බවත් (ii) $\dot{\mathbf{i}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{i}_r$ බවත්

   සාධනය කරන්න. t වේලාවේ දී P ගේ $\mathbf{V}$ ප්‍රවේගය $\mathbf{V} = \dot{r}\,\mathbf{i}_r + \left(r\dot{\theta}\right)\mathbf{i}_\theta$

   මගින් ලැබෙන බව අපෝහනය කර $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ සොයන්න.

   ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකින් m ස්කන්ධයක් දරා සිටියි. එහි අනෙක් කෙළවර සුමට විශාල තිරස් මේසයක O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳ ඇත. ආරම්භයේ දී අංශුව මේසය මත නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ තන්තුව ඍජුව හා නොඇදී තිබෙන පරිදි ය. දික්කළ තන්තුවට α කෝණයකින් ආනත දිශාවකට $\sqrt{gl}$ ආරම්භක වේගයක් ඇති ව අංශුවේ චලිතය පටන් ගනියි. ඉන් පසුව ගන්නා චලිතයේ දී තන්තුවේ r_0 **උපරිම** දිග

   $$\left(\frac{r_0}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{l}\right)^3 + f(\alpha) = 0$$

   සමීකරණය සපුරාලයි නම්, $f(\alpha)$ සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. ස්වභාවික දිග l ද මාපාංකය λ ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක්, $l+x$ දිගකට අදිනු ලැබූ විට, එම තන්තුවේ විභව ශක්තිය $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{l}x^2$ බව පෙන්වන්න.

අංශු පද්ධතියක් සඳහා රේඛීය ගම්‍යතා මූලධර්මයත් ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මයත් ප්‍රකාශ කරන්න.

පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ A හා B අංශු දෙකක් ස්වභාවික දිග a ද මාපාංකය λ ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් ඈඳ, a දුරක පරතරයක් ඇති ව සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. A අංශුව u ප්‍රවේගයෙන් $\overrightarrow{BA}$ ඔස්සේ මේසය දිගේ ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබයි. චලිතය සඳහා ගම්‍යතා හා ශක්ති සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, තන්තුවේ උපරිම දිග සොයා, තන්තුවේ දිග යළිත් a වන විට A හා B අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\frac{u}{3}$ හා $\frac{2u}{3}$ බව පෙන්වන්න.

5. $\mathbf{I}$ ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය $\mathbf{u}$ සිට $\mathbf{v}$ තෙක් වෙනස් වෙයි නම්, අංශුවේ චාලක ශක්ති වෙනස $\frac{1}{2}\mathbf{I}.(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ යන්නෙන් ලැබෙන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක් a දිගින් යුත් සමාන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තු හතරක් මගින් ඈඳූ එක එකක් m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශු හතරක්, තන්තුවලින් සෑදුනු පාද සහිත $ABCD$ රොම්බසයක කොණවල පිහිටා සුමට තිරස් මේසයක් මත තිබෙයි. $\overrightarrow{CA}$ විකර්ණය දිගේ $\mathbf{I}$ බාහිර ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. C හි අංශුව $\frac{|\mathbf{I}|}{4m}\cos 2\alpha$ ආරම්භක වේගයෙන් චලනය වන බව සාධනය කරන්න. මෙහි $B\hat{A}D = 2\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$

පද්ධතියට ලැබෙන චාලක ශක්තිය, $|\mathbf{I}|$, m හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. ස්කන්ධය M වූ A සුමට ගෝලයක්, නිශ්චලතාවේ තිබෙන m ස්කන්ධයෙන් යුත් තවත් B සුමට ගෝලයක ගැටෙන්නේ, ගැටෙන වේලාවේ දී කේන්ද්‍ර රේඛාව සමග $\theta\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවකිනි. A ගෝලයේ පෙත ϕ කෝණයකින් උත්ක්‍රම වෙයි නම්

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{(M+m)\tan\theta}{(M - em)}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි e යනු ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta \neq 0,\ M = em$ විට ද

(ii) $\theta = 0,\ M > em$ විට ද

(iii) $\theta = 0,\ M < em$ විට ද

(iv) $\theta = 0,\ M = em$ විට ද

A ගෝලයේ චලිතයේ දිශාව දක්වන්න.

7. ගැණිය හැකි අගය බොහෝ ගණනක් ගත හැකි X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක $E(X)$ ගණිත අපේක්ෂාව හා σ_X සම්මත අපගමනය අර්ථ දක්වන්න.

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

බව පෙන්වන්න.

(අ) T නොනැඹුරු දාදු කැටයක් වරක් උඩ දැමීමේ දී උඩට පෙරළෙන සංඛ්‍යාවල සම්මත අපගමනය සොයන්න. T යොදා ගෙන ක්‍රීඩාවක යෙදුනි; එහි දී 2 උඩට පෙරළුනොත් ක්‍රීඩකයා රුපියල් 40 ක් දිනයි; 4 උඩට පෙරළුනොත් රුපියල් 80 ක් දිනයි; 6 උඩට පෙරළුනොත් රුපියල් 60 ක් පරද වෙයි; වෙනත් ඕනෑම මුහුණතක් උඩට පෙරළුනොත් ඔහු දිනන්නේ වත් පරදින්නේ වත් නැත. යහ ක්‍රීඩාවක දී, ක්‍රීඩාවේ යෙදීමට ක්‍රීඩකයකු ගෙවිය යුතු යැයි අපේක්ෂා කරන අවම මුදල කීය ද?

(ආ) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යය, සම්භාවිතාව

$$P(X = x) = k\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

සහිත ව සියලු ම ධන නිඛිල අගයයන් උපකල්පනය කරයි. මෙහි k යනු ධන නියතයකි. $E(X)$ සොයා $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

8. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍ය අපගමනය අර්ථ දක්වන්න.
k යනු ධන නියතයක් විට, X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{81}\, x(9 - x^2); & 0 \le x \le 3 \text{ නම්,} \\ 0; & \text{අන් අවස්ථාවල දී,} \end{cases}$$

යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි. $k = 4$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ව්‍යාප්තියේ පහත සඳහන් එක එකක් ආගණනය කරන්න:

(i) මාතය;
(ii) මධ්‍යස්ථය;
(iii) මධ්‍යන්‍යය;
(iv) මධ්‍යන්‍ය අපගමනය

ඉහත ආගණනවල දී ඔබ යොදා ගන්නා සියලු ම පියවර සනාථ කරන්න.

9. (අ) X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යය $\mathbb{R}$ හි $[a, b]$ සංවෘත ප්‍රාන්තරය පුරා **ඒකාකාර** ලෙස ව්‍යාප්ත වී තිබෙයි. X ගේ $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයත් $F(x)$ ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතයත් සොයා ඒවායේ ප්‍රස්තාරවල දළ රූප සටහන්, $\mathbb{R}^2 \equiv Oxy$ තලය මත අඳින්න. X ගේ μ මධ්‍යන්‍ය ද σ^2 විචලතාවය ද සොයන්න.

(ආ) වාර්ෂික පරීක්ෂණයක ලකුණු, μ මධ්‍යන්‍යයකුත් σ සම්මත අපගමනයකුත් සහිත ව **ප්‍රමත** ලෙස ව්‍යාප්ත වී තිබෙයි. අයදුම්කරුවන් ගෙන් 10% කට ලකුණු 70 ට වැඩි බවත්, 20% කට ලකුණු 40 ට අඩු බවත් සොයා ගෙන ඇත. $\mu \approx 52$ බව පෙන්වා, දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව σ සොයන්න.
(ලකුණු, ආසන්නතම නිඛිලයට සන්නිකර්ෂණය කර ඇති බව උපකල්පනය කරන්න.)

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක, තැටියේ තලයට ලම්බ එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}ma^2$ බව පෙන්වන්න.

තලය සිරස් ව සිටින, m ස්කන්ධයෙන් හා a අරයෙන් යුත් ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක්, a ට වැඩි උසින් යුත් සිහින් අචල සිරස් කණුවක මුදුන මත නිශ්චලව තබා ඇත. පසුව එය නිශ්චලතාවයෙන්, සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. සිරස සමග P ස්පර්ශ ලක්ෂයේ දී අරය සාදන කෝණය $\theta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ද P ලක්ෂයේ දී අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R ද ඝර්ෂණ බලය F ද නම්,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{3a}(1-\cos\theta)$$

බව පෙන්වන්න. θ හි ශ්‍රිත ලෙස F හා R සොයන්න.

$\mu\ (<\infty)$ ඝර්ෂණ සංගුණකය කොතරම් විශාල වුවද θ කෝණය $\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$ අගයට එළඹීමට පෙර තැටිය නිශ්චිත වශයෙන් ම ලිස්සන බව අපෝහනය කරන්න.

11. ආරම්භක මුළු ස්කන්ධය M වූ රොකට්ටුවක්, නිශ්චලතාවේ සිට ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ලෙස උඩු අතට දියත් කරන ලදී. රොකට්ටුව, $k(>0)$ නියත ශීඝ්‍රතාවයකින් ඉන්ධන දවා-ලන අතර දහන පද්‍රව්‍ය, රොකට්ටුවට සාපේක්ෂව u_0 වේගයකින් සිරස් ලෙස පහළට පිට කෙරෙයි. හිස් කබොලේ ස්කන්ධය $M_0\ (<M)$ ය. t වේලාවේ දී, රොකට්ටුවේ ස්කන්ධය m වන අතර එය V ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස උඩු අතට චලනය වෙමින් තිබෙයි. චලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධයක් **නොමැති** බව උපකල්පනය කරමින්, $\frac{M-M_0}{k} \geq t \geq 0$ විට,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{u_0}{m}\ k - g$$

බව ප්‍රමූලධර්ම මගින් සාධනය කරන්න.

රොකට්ටුවේ උපරිම වේගය සොයන්න. එයට ළඟා විය හැකි වැඩි ම උස

$$\frac{u_0^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)\right]^2 + \frac{u_0 M}{k}\left[1 - \frac{M_0}{M} - \ln\left(\frac{M}{M_0}\right)\right]$$

බව පෙන්වන්න.

12. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ කාටීසිය අක්ෂ දිගේ වූ ඒකක දෛශික විට, $Oxyz$ ත්‍රිමාන අවකාශයේ (x, y, z) ලක්ෂයේ දී ක්‍රියාකරන බලයක් $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ යැයි සිතමු. O මූල ලක්ෂය වටා $\mathbf{R}$ හි දෛශික ඝූර්ණය $L_0\mathbf{i} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ ද $P \equiv (a, b, c)$ ලක්ෂය වටා $\mathbf{R}$ හි ඝූර්ණය $L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ ද වෙයි නම්

$$L = L_0 - bR_z + cR_y,$$

$$M = M_0 - cR_x + aR_z,$$

$$N = N_0 - aR_y + bR_x \text{ බව ද}$$

$$L_0R_x + M_0R_y + N_0R_z = LR_x + MR_y + NR_z \text{ බව ද සාධනය කරන්න.}$$

පද්ධතියක් පිළිවෙළින් (1, 1, 0) හා (0, 1, -2) ලක්ෂවල දී, ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_1 = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ හා $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ බල දෙකකින් සමන්විත වෙයි. එම පද්ධතිය, O හි දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{R}_0 = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ තනි බලයකට හා $\mathbf{G}_0 = L_0\mathbf{i} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ යුග්මයකට ඌනනය වෙයි නම්, l, m, n, L_0, M_0 හා N_0 යන මේවායේ අගයයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, පද්ධතිය තනි බලයකට හෝ තනි යුග්මයකට හෝ ඌනනය කළ නොහැකි බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{G}'$ යනු P ලක්ෂය වටා $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ බලවල ඝූර්ණය නම් ද $\mathbf{G}' = p\mathbf{R}_0$ නම් ද p හි අගයත් P ලක්ෂයේ පථයත් සොයන්න.