සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.

---

1. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, ස්වාභාවික දිග a සහ මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින්, සුමට තිරස් මේසයක් මත ඇති අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව යන්තම් නොබුරුල්ව, අංශුව මේසය මත තබා, තන්තුවට ලම්බ දිශාවකට $2\sqrt{\dfrac{ga}{3}}$ ප්‍රවේගයකින්, මේසය දිගේ අංශුව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

t කාලයේ දී OP තන්තුවේ දිග r ද, OP හැරී ඇති කෝණය θ ද වෙයි. චලිතයේ සමීකරණ ලියා, ඒ නයින්

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{4ga^3}{3r^3} - \frac{g}{a}(r-a)$$

බව අපෝහනය කරන්න.

$\dfrac{g(r-a)(2a-r)}{3ar^2} f(r)$ ආකාරයෙන් $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි $f(r)$ යනු r හි වර්ගජ ශ්‍රිතයකි. $f(r)$ නිර්ණය කර $a \le r \le 2a$ බව පෙන්වන්න.

r මගින් එහි විශාලතම අගය ගන්නා විට, ප්‍රවේග සහ ත්වරණ දෛශික එකිනෙකට ලම්බ වන බව අපෝහනය කර, ඒවායේ විශාලත්ව සොයන්න.

2. ස්කන්ධය m වූ කුඩා P පබලුවක්, සිරස් තලයක සවිකර ඇති අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක අමුණා ඇත. පබලුව, ආරම්භයේ දී කම්බියේ පහත් ම A ලක්ෂ්‍යයේ තබා කම්බිය දිගේ u වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හැරී ඇති කෝණය θ මගින් දක්වමින්,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 - \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$$

බව පෙන්වන්න.

කම්බියේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යය කරා පබලුව යන්තම් ළඟාවන පරිදි u හි අගය සොයන්න.

u හි මෙම අගය සඳහා,

(i) $\dfrac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\dfrac{g}{a}}\cos\dfrac{\theta}{2}$ බව,

(ii) පබලුව සහ කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $mg(2+3\cos\theta)$ බව සහ

(iii) ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව මාරු වන ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වීමට පබලුව ගන්නා කාලය

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\, ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right) \text{ බව}$$

පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. කුඩා සුමට A ගෝලයක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත u වේගයෙන් චලනය වෙමින්, මේසය මත නිශ්චලතාවයේ ඇති සර්වසම B ගෝලයක් සමඟ ඝට්ටනය වෙයි. ගැටුමට පෙර A හි චලිත දිශාව, ගැටුම් මොහොතේ කේන්ද්‍ර රේඛාව සමඟ θ කෝණයක් සාදයි. ගෝල අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. ගැටුමට පසු ගෝල වල ප්‍රවේගයන්හි, ගැටුම් මොහොතේ කේන්ද්‍ර රේඛාව දිගේ සහ එම රේඛාවට ලම්බ සංරචක සොයන්න.

ගැටුම නිසා

(i) A හි චලිත දිශාව අපගමනය වන δ කෝණය $\tan\delta = \dfrac{(1+e)\,t}{2t^2+1-e}$

මගින් දෙනු ලබන බව ද ;

(ii) චාලක ශක්තියෙහි හානිවන භාගය $\dfrac{1-e^2}{2\left(1+t^2\right)}$ බව ද

පෙන්වන්න; මෙහි එක් එක් අවස්ථාවේ දී $t = \tan\theta$ වෙයි.

4. ස්කන්ධය m, අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලක පරිධියේ P ලක්ෂයකට, එම ස්කන්ධය ම සහිත අංශුවක් දෘඩ ලෙස සම්බන්ධ කර ඇත. P ලක්ෂ්‍යය O ට සිරස් ව ඉහළින් ද, විෂ්කම්භාභිමුඛ Q ලක්ෂ්‍යය රළු තිරස් ගෙබිමක් ස්පර්ශ කරමින් ද තිබෙන පරිදි වළල්ල අල්ලා තබනු ලැබේ. ඊළඟට, වළල්ල නිශ්චලතාවයේ සිට සෙමින් විස්ථාපනය කරනුයේ ගෙබිම මත (ලිස්සීමකින් තොරව) පෙරළෙන පරිදිය ; වළල්ලේ චලිතය අචල සිරස් තලයකට සීමිත වෙයි.

OP අරය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට වළල්ලේ පමණක් චාලක ශක්තිය සොයා

(i) අංශුවේ චාලක ශක්තිය, $ma^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)$ බව ද,

(ii) $a\dot{\theta}^2 = \dfrac{g\,(1-\cos\theta)}{2+\cos\theta}$ බව ද

පෙන්වන්න.

POQ විෂ්කම්භය පළමු වරට තිරස් වන විට වළල්ලේ කෝණික ත්වරණය සොයා, මෙම මොහොතේ ගෙබිමෙන් අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

5. ස්කන්ධය m සහ දිග $2a$ වූ ඒකාකාර තුනී දණ්ඩක කේන්ද්‍රය හරහා යන, දණ්ඩට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය උපකල්පනය කරමින්, ස්කන්ධය M සහ පැත්තක දිග $2a$ වූ ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර ආස්තරයක කේන්ද්‍රය හරහා යන, එහි තලයට ලම්බ අක්ෂය වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\dfrac{2}{3}Ma^2$ බව පෙන්වන්න.

මෙහිදී, ඔබ භාවිත කරන ප්‍රමේයයක් ඇත්නම් එය ප්‍රකාශ කරන්න.

$ABCD$ ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර ආස්තරයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිදහසේ භ්‍රමණය වන්නේ නිශ්චලතාවයේ ඇති G කේන්ද්‍රය වටා ω කෝණික ප්‍රවේගයකිනි. A ශීර්ෂය ක්ෂණිකව අචල කරනු ලැබුවේ නම් ආස්තරයේ අලුත් කෝණික ප්‍රවේගය $\dfrac{\omega}{4}$ වන බව පෙන්වන්න.

ආවේගී ක්‍රියාවෙන් පසුව ආස්තරයේ ඉතිරිවන්නේ ආරම්භක චාලක ශක්තියෙන් කිනම් භාගයක් දැයි සොයන්න.

6. (අ) ගෘහ පාලිකාවක් ළඟ ඇති මුද්දක අමුණන ලද යතුරු 5 කින් එකකින් පමණක් ඉදිරි දොර විවෘත වෙයි. ඇය ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව, එක් යතුරකට පසු තවෙකක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනිමින්, එම දොර විවෘත කිරීමට උත්සාහ කරයි. "සාර්ථක උත්සාහය දක්වා භාවිත කෙරෙන යතුරු ගණන" Y සසම්භාවී විචල්‍යය ලෙස ගනිමු. Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සෙවීමට රුක් සටහනක් භාවිත කර, අපේක්ෂාව ගණනය කරන්න.

(ආ) විදුලි භාණ්ඩ අලෙවිහලක එක්තරා වර්ගයක විදුලි කම්බියක් සඳහා මාසික ඉල්ලුම X (මීටර සිය ගණනින්), සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් වෙයි. එහි $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය දෙනු ලබන්නේ

$$f(x) = \begin{cases} k\,(1-x)^3, \; 0 \le x \le 1 & \text{සඳහා ;} \\ 0 & \text{, අනෙක් විට,} \end{cases}$$

මගින් ය.

$k = 4$ බව පෙන්වා, $P(X > x)$ සහ X හි සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය සොයන්න.

(i) ඉල්ලුම, මීටර 10 ට වඩා වැඩි වීමේ සම්භාවිතාව

සහ

(ii) මාසයක සැපයුම අවසන්වීමේ සම්භාවිතාව 0·0016 වන පරිදි මාසයක මුල දී අලෙවිහලේ තිබිය යුතු එම විදුලි කම්බි තොගයේ මීටර ගණන

සොයන්න.

7. X සසම්භාවී විචල්‍යය, පොයිසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන අතර, එහි සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

වෙයි.

X හි මධ්‍යන්‍යය μ බව සාධනය කරන්න.

කාර්යාල ගොඩනැගිල්ලක් තුළ ඇති දුරකථන හුවමාරුවකට බාහිර සම්බන්ධතා යම්කිසි සංඛ්‍යාවක් ඇත. X මගින් "මිනැම මොහොතක පාවිච්චි කෙරෙන බාහිර සම්බන්ධතා ගණන" දක්වමු. එය මධ්‍යන්‍යය 3 වූ පොයිසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමු.

X සඳහා **සම්භාව්‍යතම** **(most probable)** වූ අගයන් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, ඒවා සොයන්න. ඒ එක් එක් අගයට අනුරූප සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0·225 බවත් පෙන්වන්න.

මිනැම මොහොතක, පාවිච්චි කෙරෙන බාහිර සම්බන්ධතා ගණන

(i) එකකට වැඩි නොවීමේ

(ii) හතරකට වැඩි නොවීමේ

සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

දී ඇති මිනැම මොහොතක, අඩු වශයෙන් බාහිර සම්බන්ධතා එකක් වත් නිදහස් ව තිබීමේ සම්භාවිතාව 0·90 ට වැඩි වන පරිදි හුවමාරුවට තිබිය යුතු අවම බාහිර සම්බන්ධතා ගණන සොයන්න.

[$e^{-3} \simeq 0{\cdot}05$ ලෙස ගන්න.]

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. (අ) පොකුණක මාළු විශාල සංඛ්‍යාවක් පීනමින් සිටිති. උන්ගේ බර, මධ්‍යනය 1·25 kg සහ සම්මත අපගමනය 0·40 kg සහිත ව ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත. අල්ලනු ලබන මාළුන්ගෙන් 0·50 kg ට අඩු බර ඇති උන් ආපසු පොකුණට දැමිය යුතු වෙයි.

බිලී බාන්නෙක් මෙම පොකුණෙන් සසම්භාවී ලෙස මාළුවෙක් අල්ලා ගනියි නම්, පහත දක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) මාළුවා ආපසු පොකුණට දැමීමට වීම ;

(ii) මාළුවාගේ බර, කලින් වාර්තාව වූ $2\frac{2}{3}$ kg ඉක්මවීම.

(ආ) මැස්සෙකුට එක්තරා කෘමිනාශකයක් ඉසිනු ලැබූ විට ඌ මිය යාමේ සම්භාවිතාව 0·8 වේ.

(i) මැස්සන් 5 ක් වෙත එම කෘමිනාශකය ඉසිනු ලැබුවහොත් එයින් 4 ක් වත් මිය යාමේ සම්භාවිතාව සෙවීම සඳහා ද්වි-පද ව්‍යාප්තිය යොදන්න.

(ii) මැස්සන් 100 කින් සමන්විත රැළකට එම කෘමිනාශකය ඉසිනු ලැබේ. එයින් අඩුම වශයෙන් 80 ක් වත් මිය යාමේ සම්භාවිතාව, ද්වි-පද ව්‍යාප්තිය සඳහා ප්‍රමත සන්නිකර්ෂණය යෙදීමෙන්, නිමානය කරන්න.

9. ඒකක ස්කන්ධයෙන් යුතු P අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන අතර, එහි වේගය w වන විට kw ප්‍රතිරෝධයක්, එහි චලිතයට එරෙහිව මාධ්‍යයෙන් ඇති කරයි ; මෙහි k නියතයකි.

P අංශුව O මූලයේ සිට සිරස් ව ඉහළට, Oy-අක්ෂය දිගේ v_0 වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එය උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට ගන්නා කාලය,

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

සර්වසම Q අංශුවක් $t = 0$ කාලයේ දී, O සිට Oxy-තලයේ ආරම්භක $u_0\mathbf{i} + v_0\mathbf{j}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ ; මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ. t කාලයේ දී මෙම Q අංශුවේ ප්‍රවේගය $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ නම්, $u = u_0 e^{-kt}$ බව පෙන්වන්න.

Q අංශුවේ පථයෙහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට O සිට තිරස් දුර $\frac{u_0 v_0}{g + kv_0}$ බව, ඒ නයින් පෙන්වන්න.

10. $P\mathbf{i}$, $Q\mathbf{j}$, $R\mathbf{k}$ නිශ්ශූන්‍ය බල, පිළිවෙළින් $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $c\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරයි ; මෙහි a, b, c ධන නියත වන අතර, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy, Oz සුරත් කාටීසිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ.

බල පද්ධතිය, O හි $\mathbf{F}$ තනි බලයකින් සහ ඝූර්ණ දෛශිකය $\mathbf{G}$ වූ යුග්මයකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකිනම් $\mathbf{F}$ සහ $\mathbf{G}$ සොයන්න. $\mathbf{G}$ දෛශිකය Oy-අක්ෂයට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වන්නේ $\frac{a}{P} = \frac{b}{Q} + \frac{c}{R}$ නම් බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් $Q = 2P$, $R = 3P$, $b = \frac{4}{3}a$, $c = a$ බව දී ඇත්නම්,

(i) පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට ඌනනය වන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(ii) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට Oy-අක්ෂය $y_1\mathbf{j}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමුවෙයි නම් $y_1 = -\frac{2a}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවෙහි දෛශික සමීකරණය ලියා දක්වන්න.