

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993					
(01) ශුද්ධ ගණිතය I (01) Pure Mathematics I	<table border="1"> <tr> <td colspan="2">01</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>I</td> </tr> </table>	01		S	I
01					
S	I				
පැය තුනයි / Three hours					

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $S_n = \sum_{r=1}^n u_r$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $u_r = r(r+1)(r+2)$.

$S_n = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$ බව පෙන්වන්න.

එකයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $V_r = \frac{1}{S_r}$ වීම

$\sum_{r=1}^n V_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව ද එහෙත්

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව ද අනන්තය හෙත් එහි ඵලතාවය $\frac{2}{9}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) ගණිත අනුක්‍රමය මූලධර්මය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n යනු ධන නිඛිලයක් වීම

$$2^{2n+1} - 6n - 2$$

යන්න 18 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

2. (a) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ ද $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ද

වන පරිදි x හි අගය පරාසය සොයන්න.

(b) a, b, c, p, q, r පියල්ලම් ධන නම්

$$\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c}\right) \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right) \geq 9$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $|5-3x| \geq 2-3x$

වන පරිදි x හි අගය පරාසය සොයන්න.

3. (a) a, b, c සියල්ලම ප්‍රසින්න ω යුගලයකට අයත් කරමින්

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad \text{ප්‍රකාශනය} \quad k + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි k, A, B, C යනු නිර්ණය කළ හැකි නියත වේ.

$a = b \neq c$ අවස්ථාව ද සාකච්ඡා කරන්න.

a, b, c, d සියල්ල ම ප්‍රසින්න වීම

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

- (b) එකේ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන්

$$(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$$

ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න

4. $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = 1$ සඳුරාලන, $-\pi < \theta \leq \pi$ ප්‍රාන්තරයෙහි පිහිටියා වූ θ හි ප්‍රසින්න අගයන් , සහ නිර්ණය කරන්න.

එනමින්, $\omega^3 = 1$ සමීකරණය සඳුරාලන එකිනෙකට වෙනස් ω සංඛ්‍යා $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a සහ b තාත්වික වේ. $\omega \neq 1$ නම්, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

p සහ q තාත්වික වීම, $x^3 - 3px - p^3 - q^3$

ප්‍රකාශනය

$$(x-p-q)(x-p\omega-q\omega^2)(x-p\omega^2-q\omega)$$

ආකාරයෙන් සාධකවලට බිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනමින්, $z^3 - 18z - 35 = 0$ සඳුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල අගයන් සොයන්න.

5. ආරම්භක සටහනෙහි, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කෙරේ. λ යනු තාත්වික සරාමිසිකයක් වීම $z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආරම්භක සටහනෙහි නිරූපණය කැරෙන P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න.

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{සහ} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ගැටි ගනිමු.

$$\frac{P_1 P'}{P_1 P_2} = \frac{1}{3} \quad \text{සහ} \quad \frac{P_1 P''}{P_1 P_2} = -1$$

එන සරිදි සහ $P_1 P_2$ මත ලක්ෂ්‍ය දෙකම පවතින සේ පිහිටියාවූ P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් නිරූපණය කැරෙන z' සහ z'' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

සරිදි, විස් (z') සහ විස් (z'') ලබාගන්න. ($-\pi < \text{විස් } z \leq \pi$)

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් $P_1 O P_2$ කෝණයේ අග්‍රාන්තර සහ ඛාහිර සමච්ඡේදක මත පිහිටන බව පෙන්වන්න ; මෙහි O මූලය වේ.

6. (a) GONAPINUWALA වචනයේ අක්ෂරවලින් සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව,
 (i) අක්ෂර දෙකෙන් වරකට අක්ෂර සියල්ලම ගත් විට
 (ii) අක්ෂර දෙකෙන් වරකට ඕනෑම අක්ෂර තනරක් ගත් විට
 සොයන්න.

- (b) එකිනෙකට වෙනස් වීදි කාඩ් දහයක් සහ එකිනෙකට වෙනස් තඹ කාඩ් පහක් අඩංගු මල්ලයින් කාඩ් අටක් ගත හැකි සංයෝජන සංඛ්‍යාව,
 (i) තේවිලී මත කිසිම ඩීමා කිරීමක් නොමැති විට
 (ii) තෝරාගත් කාඩ් අතර යටත් පිරිසෙයින් තඹ කාඩ් දෙකක් වත් සිතිය යුතු විට,
 සොයන්න.

7. සුපුරුදු අංකනයෙන්, n ධන නිඛිලයක් විට,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \dots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

ප්‍රදේශ විවේචන සුම යොදා ගැනීමෙන්

(i) $C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 + \dots + r C_r + \dots + n C_n = n 2^{n-1}$

(ii) $C_0 - \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 + \dots + (-1)^r \frac{C_r}{r+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි

$$(1 + x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + x^n.$$

8. (a) $-1 < x < 1$ විට x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

සහ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}\right)$

උත්තර දෙකම සමාන වන්නේ මන් දැයි පහදන්න.

- (b) ප්‍රමුඛවර්ණවලින්, x විෂයයෙන් $\sec x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සහ $y = (\sec x + \tan x)^{\frac{1}{2}}$ නම්

(i) $2 \frac{dy}{dx} = y \sec x$

සහ (ii) $2 \frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2 \tan x) \frac{dy}{dx}$

බව සාධනය කරන්න.

9. (a) $\int \frac{8x + 7}{2x^2 + 8x + 10} dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීමෙන්,

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x dx$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $x = \tan \theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n ධන නිඛිලයක් වීම,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-4)}{(2n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

බව සාධනය කරන්න.

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

බව පෙන්වන්න.

10. (a) $y = e^x \sin x$ නම් $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

බව පෙන්වන්න.

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, x^6 පදය තෙක් $e^x \sin x$ පදනා මැක්ලෑරීන් ප්‍රසාරණය ලියන්න.

(b) Ox මස්ථයේ සෑම ඒකක $\frac{1}{2}$ කට ම කෝච්ඡා ගැනීමෙන් සීමිතත් සුක්‍රය යොද,

$$\int_0^4 \frac{4x - x^2}{x^2 + 4} dx$$

පදනා දළ අගයක් සොයන්න.

$$y = \frac{4x - x^2}{x^2 + 4} \quad \text{පදනා පහත දක්වන වගුව භාවිත කරන්න.}$$

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	0	0.4118	0.6	0.6	0.5	0.3659	0.7308	0.1077	0

11. $x = r^2 - 2t, y = r^2 - 12t$ සමීකරණවලින් වක්‍රයක් පරාමිතිකව දී ඇත. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2}$ රාශි t අනුව සොයන්න.

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, වක්‍රය මත උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය ලබාගන්න. $P(8, 16)$ ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වූ t හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. P ගැන කුමක් කිව හැකි ද? තවද, වක්‍රය බන්ධනාගාර ජේලයක කරන ලක්ෂ්‍යයන් ද y අක්ෂයට සමාන්තරව ස්පර්ශක පවතින ලක්ෂ්‍යයන් ද නිර්ණය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ මගින් C වක්‍රයක් ගෙන දේ.

(i) $0 \leq y \leq 2$ සහ (ii) $x \rightarrow \pm \infty$ වීම $y \rightarrow 1$ බව පෙන්වන්න.

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ C මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල බන්ධනාංක ලියන්න. C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

C වක්‍රය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් සහ සමමිතික බව සැලැකීමෙන්, $y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ මගින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේ දළ සටහනක්ද එම රූ සටහනෙහිම අඳින්න.

තවද C වක්‍රයෙහි $x=2, y=1$ රේඛා මගින් අන්තර්ගත වන S කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

ඒ නමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x=2$ රේඛාවෙහි $0 \leq x \leq 2$ ප්‍රාන්තරයේ දී C, C' වක්‍ර මගින් සෑදෙන C'' වක්‍රයෙහි අන්තර්ගත වන S' කොටසේ වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

$y=1$ රේඛාව වටා රේඛීයත් π වලින් S' ක්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන සහයේ පරිමාව සොයන්න.