

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் துறைமன்றம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
 கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1995 ஓகஸ்த்
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ශුද්ධ ගණිතය I

தூய்மைக் கணிதம் I

PURE MATHEMATICS I

01	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$

ඉන්පසුව r වෙනි පදය u_r ද

$$f(r) = \frac{-1}{4(r+2)(r+4)} \quad \text{ද නම්}$$

$$f(r) - f(r-2) = u_r \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

ඒ නමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\sum_{r=1}^n u_r$ සොයන්න.

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \frac{11}{96} \quad \text{බව අපෝහනය කරන්න.}$$

(ii) n නම් ඕනෑම සෑහෙනොවු නිඛිලයක් සඳහා $n^7 - n$ යන්න 7 න් බෙදිය හැකි බව, ගණිත අනුක්‍රමය මූලධර්මය යොදාගනිමින් සාධනය කරන්න. සෑහෙනොවු නිඛිලය සඳහා ප්‍රතිඵලය අපෝහනය කරන්න. $n^7 - n$ සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් n නම් ඕනෑම නිඛිලයක් සඳහා එය 3 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

n නම් ඕනෑම මන්සේ නිඛිලයක් සඳහා $n^7 - n$ යන්න 168 න් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i) $7 - x \geq 2 \left| x^2 - 4 \right|$ කාරණ කරන්නො වූ x හි අගයන් සොයන්න.

(ii) ඕනෑම ධන x සඳහා

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

a, b හා c යනු ධන සංඛ්‍යා වේ.

අනෙක ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින්

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

$a + b + c = 1$ නම් $2 - a, 2 - b$ හා $2 - c$ ධන බව පෙන්වන්න.

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq \frac{3}{5} \quad \text{බව අපෝහනය කරන්න.}$$

3. (i) $2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ නම් $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ හා $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ අතර x පැවතිය හොහැකි බව ද 1 හා 3 අතර y පැවතිය හොහැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි x හා y තාත්කලීය වේ.

(ii) $(a + b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

a හා b ($a \neq b$) තාත්කලීය නම් ඉහත සමීකරණයට තාත්කලීය මූල එකක් සමඟින් ඇති බව සාධනය කරන්න.

$x^2 - 6x - 6 = 0$ සමීකරණය ඉහත ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර, එයට ඇත්තේ තාත්කලීය මූල එකක් සමඟින් යැයි දී ඇත් නම්, එම මූලය සොයන්න.

4. ධන නිඛිලය දරන සෑම k සඳහා, ද මූලාවලි ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

k නිඛිලයක් වුව, $p = \cos(6k + 1)\frac{\pi}{9} + i \sin(6k + 1)\frac{\pi}{9}$ නම්,

(a) $p^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(b) $\bar{p}^3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

බව පෙන්වන්න: \bar{p} යනු p හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබිම්බය වේ.

$z^6 - 8z^3 + 64 = 0$ සමීකරණයේ z^3 හි අගය දෙක සොයා, ඒ නැගින් එම සමීකරණයේ ප්‍රතික්ෂේප මූල හය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නැගින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $x^2 - ax \cos \phi + b$ ආකාරයේ වූ තාත්කලීය වර්ගයක් සාධක තුනක ගුණිතය ලෙස $x^6 - 8x^3 + 64$ ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b, ϕ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

5. z_1 සහ z_2 යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. $z_2 - z_1$ සහ $\frac{z_2}{z_1}$ ආගන්ථී සටහනෙහි නිරූපණය කරන ආකාරය පෙන්වන්න.

$z_0 = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ ද z_0, z_0^2, z_0^3 සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වන්නේ ද නම් PQR ත්‍රිකෝණය සමද්විචාද බව පෙන්වා එහි කෝණ සොයන්න.

$z_1 = \omega z_0, z_2 = \omega z_0^2$ සහ $z_3 = \omega z_0^3$; මෙහි $\omega = \cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14}$.

එක් $\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \right) = \frac{3\pi}{7}$

බව අපෝහනය කරන්න.

6. (i) වරකට අක්ෂර පියවල ම ගනිමින් **KANAKARAYANKULAM** යන වචනයෙහි අක්ෂර දහයකින් සෑදිය හැකි වචන සංඛ්‍යාව සොයන්න. (උත්තරය සුදු කිරීම අනවශ්‍යයි.)

ඉහත වචනයෙන් (A, I) ස්ථරාක්ෂර අක්ෂර වරකට අක්ෂර හතර බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන 41 ක් බව පෙන්වන්න.

(ii) ගැහැණු ළමුන් දෙදෙනෙකු එක ළඟ නොසිටින පරිදි, පිරිමි ළමුන් හය දෙනෙකු සහ ගැහැණු ළමුන් හතර දෙනෙකු, කී ආකාරයකින් ව්‍යාජනාකාරව පිළියෙල කළ හැකි ද?

7. n ධන නිඛිලයක් වීම, $(1+x)^n$ පදනා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කර පාඨනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණය යොදා, විච්ඡේදන ක්‍රමයකින්

$${}^n C_0 + 2. {}^n C_1 x + 3. {}^n C_2 x^2 + \dots + (n+1). {}^n C_n x^n$$

යන්න, $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න; මෙහි ${}^n C_r$ ට එහි සුඛරුද්‍ර ඉරිඟු ඇත.

- (i) $[1+(n+1)x](1+x)^{2n-1}$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් හා x^n හි සංගුණකය සැලකීමෙන්,

$$({}^n C_0)^2 + 2. ({}^n C_1)^2 + 3. ({}^n C_2)^2 + \dots + (n+1). ({}^n C_n)^2$$

ප්‍රේමයේ රේඛනය, $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න; n යනු ධන නිඛිලයකි.

- (ii) n ඉරට්ටේ නම්,

$${}^n C_0 + 3. {}^n C_2 + 5. {}^n C_4 + \dots + (n+1). {}^n C_n$$

ප්‍රේමයේ රේඛනය සොයන්න.

8. (i) ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීමෙන් පවත් ගෙන,

$$y = -\cot x - x$$

ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

- (ii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර, එවා

$$x \frac{dy}{dx} = 3(y^2 x^6 - y + 4)$$

යන්නෙන් සම්බන්ධ වී ඇත.

- (a) $y = \frac{2}{x^3} \tan(2x^3 - \alpha)$ යන්න ඉහත සම්බන්ධය සපුරාලන බව, පසු ආදේශයෙන් පෙන්වන්න; මෙහි α නියතයකි.

- (b) එම සම්බන්ධය

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2(4 + y^2)$$

යන්නට උභයතා කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $v = x^3 y$.

- (iii) $x = 2t^3 + 1$ සහ $y = 4t^4 - 1$ නම්,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) + 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

9. (i) $\int \frac{5x+3}{(x-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

(ii) $x+1 = \frac{1}{t}$ ආදේශනය, $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)(4x-3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\{(4t-1)(1-2t)\}^{\frac{1}{2}}}$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{1}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta$ යෙදීමෙන්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, අනුකලයේ අගය $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{315}$ බව පෙන්වන්න.

10. (a) ආසන්න අනුකලනය සඳහා පිම්පන් නිඛිල ප්‍රකාශ කරන්න.

කෝටික 5 ක් සලකමින්, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ මගින් π ට ආසන්න අගයක් සෙවීමට පිම්පන් නිඛිල උපයෝගී කර ගන්න.

(b) $f(x) = e^{\sin^{-1} x}$ නම්

$(1-x^2)f^{(2)}(x) - x f^{(1)}(x) = f(x)$ බව ද

$(1-x^2)f^{(3)}(x) - 3x f^{(2)}(x) = 2 f^{(1)}(x)$ බව ද

පෙන්වන්න: මෙහි $f^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} f(x)$.

ගණිත අනුකත මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ r නම් මිතුම් ධන නිඛිලයක් සඳහා

$(1-x^2)f^{(r+2)}(x) - (2r+1)x f^{(r+1)}(x) = (1+r^2)f^{(r)}(x)$ බව සාධනය කරන්න.

$e^{\sin^{-1} x}$ හි මැක්ලොරින් ප්‍රසාරණය

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

බව පෙන්වන්න.

11. (i) $x = 2(1 + \sin \theta)$ හා $y = 2 \cos 2\theta$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\theta \left(\neq \frac{n\pi}{2}; \text{ මෙහි } n \text{ යනු} \right.$

$\left. \text{ඕනෑම නිඛිලයකි.} \right)$ පරාමිතික සහිත ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට අදින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබාගන්න.

වක්‍රයේ දළ කවු සටහනක් අඳින්න. $\theta = -\frac{\pi}{2}$ සහ $\theta = \frac{\pi}{2}$ දී ස්පර්ශක ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

(ii) $x = 2+t$ හා $y = 2-t^2$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C' වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $-\infty < t < \infty$ වේ. වක්‍රයේ දළ කවු සටහනක් අඳින්න.

ඉහත (i) හි සහ (ii) හි ඇති C, C' වක්‍ර එක එකෙහි සමීකරණවල කාර්ටීසියානු ආකාර එකම බව පෙන්වන්න. වක්‍ර දෙක වෙනස් මන් දැයි පැහැදිලි කරන්න.

12. පිළිවෙලින් $y^2 = x$ හා $y = 2 - x^2$ සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වක්‍රයන්හි කවු සටහන එකම රූපයක අඳින්න.

C_1 හා C_2 වක්‍ර දෙක හා $y = 2$ සරල රේඛාව මගින් සපර්යානක S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

S පෙදෙස $4x + 1 = 0$ රේඛාව වටා සාක්ෂිකරණ කෙරෙහි ක්‍රමණය කළ විට ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.