සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

016576

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1996 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1996 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1996

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

01
S II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (i) ත්‍රිකෝණයක පරිවෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට ත්‍රිකෝණයේ පාද මත ඇඳි ලම්බයන්හි අඩි ඒකරේඛීය බව සාධනය කරන්න.

P යනු ABC ත්‍රිකෝණයක පරිවෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි සිතමු. PA, PB, PC විෂ්කම්භ වන සේ පිළිවෙළින් S_1, S_2, S_3 වෘත්ත අඳිනු ලැබේ. පොදු ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන P ට අමතරව, S_2 සහ S_3, S_3 සහ S_1, S_1 සහ S_2 වෘත්තවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X, Y, Z වේ. X, Y, Z ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

(ii) මෙනලාඕස් ප්‍රමේයයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කරන්න.

ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල දී එහි පරිවෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක, ත්‍රිකෝණයේ සම්මුඛ පාද ඒකරේඛීය ලක්ෂ්‍යවල දී හමුවන බව සාධනය කරන්න.

2. $VABC$ චතුස්තලයක, VA දරය ABC තලයට ලම්බ වන අතර, $AC = BC = a$ සහ $VA = AB = \sqrt{2}\,a$. P යනු VB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි. VAC තලයෙහි F යනු A සිට VC ට ඇඳි ලම්බයේ අඩියයි. APF තලයට VB ලම්බ බව පෙන්වන්න.

K යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි සිතමු. K හරහා, VB දරයට ලම්බ වන සේ තලයක් අඳින්න. V සිට එම තලයට ඇති දුර සොයන්න.

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාවෙහි $P(\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න. ඒ නයින්, $ax + by + c = 0$ හි, $lx + my + n = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

රොම්බසයක විකර්ණයක් $2x + y - 1 = 0$ රේඛාව වේ. එක් ශීර්ෂයක් $(2, -3)$ වන අතර එහි එක් පාදයක් $y - x - 4 = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි. ඉතිරි පාද තුනෙහිත්, ඉතිරි විකර්ණයේත් සමීකරණ සොයන්න.

4. $ax + by = 1$ සරල රේඛාව, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය කරයි. ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී, AB සෘජු කෝණයක් ආපාතනය කරයි නම්,

$$c(a^2 + b^2) + 2(ag + bf + c) = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ වෘත්තයේ PQ විචල්‍ය ජ්‍යායක් මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී සෘජු කෝණයක් ආපාතනය කරයි. ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිත කර හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය

$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

වෘත්තය බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

5. (i) a හා α යනු ධන නියත විට, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන් $r = a\sec(\theta - \alpha)$ මගින් ගෙන දෙන පථය හඳුන්වා දෙන්න.

$r = 4\sin\theta - 3\cos\theta$ සමීකරණය සහිත C වක්‍රයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ධ්‍රැවයේ සිට ඈතින්ම පිහිටි C හි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය කුමක් ද?

(ii) $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න; මෙහි

$$f(x) = 1 - x, \quad x \le 1$$
$$= x - 1, \quad 1 \le x \le 2$$
$$= 3 - x, \quad x \ge 2.$$

එම රූප සටහනෙහි ම, $y = g(x) = f(2x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරය ද ඇඳ, $g(x) \ge y \ge f(x)$ වන $R(x, y)$ පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

R හි දී $y - 2x$ හි අඩුතම අගය සොයන්න.

6. $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී, $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය,

$$tx + y = at^3 + 2at$$

බව සාධනය කරන්න.

$y = mx + c$ සරල රේඛාව, $y^2 = 4ax$ පරාවලය මත පිහිටි $P(at^2, 2at)$, $Q(aT^2, 2aT)$ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා යයි නම්,

$$t + T = \frac{2}{m} \quad \text{සහ} \quad atT = \frac{c}{m}$$

බව සාධනය කරන්න.

c යනු නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් නම්, P හි දී සහ Q හි දී අභිලම්බවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය (m විචලනය වන විට);

$$2(cx + 2ay - 2ac)^2 + c^3y = 0$$

වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$c = 0$ නම් කුමක් වන්නේ ද?

7. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ඉලිප්සයට, විකේන්ද්‍රික කෝණය ϕ වූ P ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි l ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

විකේන්ද්‍රික කෝණ θ සහ ϕ සහිත ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශකයන්ගේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

N යනු මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට l රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය යි. $S = 0$ ඉලිප්සයට N සිට ඇඳි අනික් ස්පර්ශකයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන Q හි විකේන්ද්‍රික කෝණය θ නම්

$$a^2\tan\phi = b^2\tan\tfrac{1}{2}(\theta + \phi)$$

බව පෙන්වන්න.

Q' වනාහි, ඉලිප්සයෙහි Q හරහා වූ විෂ්කම්භයේ අනික් කෙළවරයි. $S = 0$ ඉලිප්සයට P හරහා ඇඳි අභිලම්බය Q' හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

8. $px + qy = 1$ රේඛාව, $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ බහුවලයට ස්පර්ශකයක් වේ නම් $a^2p^2 - b^2q^2 = 1$ බව පෙන්වන්න.

k නියතයක් වූ, $x^2 + y^2 - 2ky = a^2 + b^2$ වෘත්තය $S = 0$ බහුවලයේ ස්පර්ශෝන්මුඛ $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ සහ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය කරයි ; මෙහි P_1 ප්‍රථම වෘත්තපාදකයෙහි ද P_2 සිව්වන වෘත්තපාදකයේ ද පවතී.

$$\frac{y_1}{b} = \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}$$

සහ $$\frac{x_2}{a} = -\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda = \frac{kb}{a^2 + b^2}$.

ඒ නයින්, k හි සියලුම අගයන් සඳහා P_1P_2 රේඛාව $S = 0$ බහුවලය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

9. (i) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා, සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{\sin (B - C)}{\sin A} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයක, කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය I ද පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O ද වේ. A යනු සුළු කෝණයක් නම් BC ට IO හි ආනතිය

$$\tan^{-1} \left| \frac{\cos B + \cos C - 1}{\sin B - \sin C} \right|$$

බව පෙන්වන්න.

10. (i) 1 සහ 2 අතර $\frac{\cos x + 2 \sin x + 1}{\cos x + \sin x}$ පැවතිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(ii) $A + B + C = \pi$ නම්,

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ විසඳන්න.

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

බව සාධනය කරන්න

11. A සහ B සිද්ධීන් දෙක, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ වන පරිදි වේ නම් A සහ B ස්වායත්ත සිද්ධීන් යැයි කියනු ලැබේ.

C සහ D ස්වායත්ත සිද්ධීන් දෙකක් යැයි සිතමු. C' සහ D' යනු පිළිවෙලින් C හි සහ D හි අනුපූරක සිද්ධීන් වේ.

(a) C සහ D' ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව ද

(b) C' සහ D' ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව ද

පෙන්වන්න.

මිනිසෙකු සහ ඔහුගේ භාර්යාව, ඔවුන්ගේ විවාහයෙන් පසු අඩු වශයෙන් වර්ෂ 25 ක් ජීවත් වීමේ සම්භාවිතාවන් පිළිවෙලින් 0.70 සහ 0.80 වේ.

වර්ෂ 25 කින්,

(i) දෙදෙනාම ජීවත්ව සිටීමේ,

(ii) එක් කෙනෙකුවත් ජීවත්ව නොසිටීමේ,

(iii) අඩුවශයෙන් එක් කෙනෙකුවත් ජීවත්ව සිටීමේ,

(iv) හරියටම එක් අයෙකු ජීවත්ව සිටීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

12. X යනු,

$X = x$	x_1	- - -	x_i	- - -	x_n
$P[X = x]$	p_1	- - -	p_i	- - -	p_n

සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සහිත විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් යැයි සිතමු.

X හි මධ්‍යන්‍යය $E(X)$ සහ X හි විචලතාව $\mathrm{Var}\, X$ අර්ථ දක්වන්න.

a සහ b නියත නම්,

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$

සහ (ii) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}\, X$

බව පෙන්වන්න.

සාධාරණ දාදු කැට යුගලයක් විසිකිරීමේ දී, ඓක්‍යය 7 ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

කිසියම් ක්‍රීඩකයෙකු සාධාරණ දාදු කැට යුගලයක් 5 වරක් විසිකරයි. මෙම විසිකිරීම් X වල දී, ඓක්‍යය 7 වේ. X ට ගත හැකි අගයන් ලියා, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න.

X හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව පිළිවෙලින් $\frac{5}{6}$ සහ $\frac{25}{36}$ බව පෙන්වන්න.

ඔහුට, $6X + 7$ ලකුණක් ප්‍රදානය කෙරේ නම්, ඔහුගේ අපේක්ෂිත ලකුණත්, ලකුණේ විචලතාවත් සොයන්න.