

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ-1991)  
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special-1991)

(01) ගුද්ධ ගණිතය I  
(01) Pure Mathematics I

01	
S	I

පැතුනු/Three hours  
ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i)  $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 \equiv n^3$

සහ

$$\frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( n - \frac{1}{2} \right) \equiv n^3$$

සර්වසාමය සත්‍යාපනය කර

$$\sum_{r=1}^n r^3 \quad \text{සහ} \quad \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} r^3$$

සෙවීමට ඒවා භාවිත කරන්න.

(ii) ගණිත අභ්‍යන්තරය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිත කර

$$22n+1 - 9n^2 + 3n - 2$$

යන්න 54 හි ගුණකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

2. (i)  $a, b$  සහ  $c$  සාන්විත නම්

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)x + b^2 + c^2 = 0$$

සමීකරණයෙහි මූල තාත්වික විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

(ii)  $ax^2 + bx + c = 0$  සහ  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  සමීකරණවල මූලවල අනුයාත සමාන නම්

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{b'^2}{a'c'}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii)  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$

අසමානතාව සපුරාලන  $x$  හි අගයන් සොයන්න.

3. (i)  $f(x)$ , සහ  $g(x)$  වූ කලි  $3x^2 + x - 2$  න්  $f(x)$  බෙදූ විට ශේෂය  $2x + 1$  ද  $x^2 - 1$  න්  $g(x)$  බෙදූ විට ශේෂය  $x + 2$  ද වන පරිදි බහුපද දෙකකි.

$f(x) + g(x)$  බහුපදයේ ඒකක සාධකයක් සොයා එම ඒකක සාධකයෙන්  $f(x)g(x)$  බෙදූ විට ශේෂය  $-1$  බව සාධනය කරන්න.

(ii)  $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$  හි සාධක සොයන්න.

4.  $n$  ධන නිඛිල දර්ශකයක් සඳහා ද මූලාංග ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ නම්,}$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ

$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

බව පෙන්වන්න.

(a)  $\cos 5\theta = 0$  සමීකරණයේ මූල සලකා,  $4 \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10} = \sqrt{5}$  බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින්

$$\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

බව පෙන්වන්න.

(b)  $\cos 5\theta = 5 \cos \theta$  සමීකරණය සපුරාලන  $\theta$  හි තාත්වික අගයන් සියල්ල සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා 'සාමාන්‍ය' සහ 'විස්තාරය' යන පද අර්ථ දක්වන්න.

$z_1, z_2$  සහ  $\left(\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}\right) z_2 - \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) z_1$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන් ආභන්ධ සටහනෙහි (වෘත්තාකාරව නම් කරන ලද)  $A, B$  සහ  $C$  ලක්ෂ්‍යවලින් පිලිවෙලින් නිරූපණය කරයි.  $ABC$  කෝණය  $120^\circ$  බව ද  $AB = BC$  බව ද පෙන්වන්න.

$ABCDEF$  සවිධි සඬුයක් ද  $U$  එහි කේන්ද්‍රය ද නම්  $z_1$  සහ  $z_2$  මගින්  $E$  සහ  $U$  නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

තම  $U$  කේන්ද්‍රය වටා සඬුය දක්ෂිණාවර්තව  $45^\circ$  කින් භ්‍රමණය කරනු ලබන්නේ නම්  $E$  හි නව පිහිටීම මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව  $z_1$  සහ  $z_2$  ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. (i) "RELATIVISTIC" යන වචනයෙහි අකුරුවල පිළියෙළකිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.  
මින් කවර සංඛ්‍යාවක "I" අක්ෂර තුන ම එකට පැමිණෙයි ද?  
1 අක්ෂර 2 ක් එකට ද නොවැනි 1 අකුරක් 2 ට යාබදව නොවී ද ඇත්තේ, පිළියෙළ කිරීම් කවර සංඛ්‍යාවක ද?
- (ii) විදී කායි 8 ක් ද තම කායි 4 ක් ද බැලියක ඇත. මේවා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ. වරකට 7 බැලීන් කී ආකාරයකට කායි තෝරා ගත හැකි ද? මේවායින් කවර සංඛ්‍යාවක අවම වශයෙන් එක් විදී කායික් වත් ඇත් ද?

7.  $n$  ධන නිඛිලයක් වීම,  $(a + x)^n$  හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා එය සාධනය කරන්න.  
 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$  හි ප්‍රසාරණයේ  $x$  හෙන් ස්වායත්ත පදය ද  $x = \frac{1}{4}$  වන විට විශාලතම පදය ද සොයන්න.

$$(1+x)^4 (1-x)^n \text{ සහ } (1-x)^n (1+x)^{n+4}$$

ප්‍රසාරණවල  $x^{2r}$  ( $n \geq 2r$ ) හි සංගුණක සොයා  
 $(-1)^r [nC_r - {}^n C_{r-1} + {}^n C_{r-2}] = {}^n C_0 {}^{n+4} C_{2r} - {}^n C_1 {}^{n+4} C_{2r-1} + \dots + {}^n C_{2r} {}^{n+4} C_0$   
බව පෙන්වන්න.

8. (i) ප්‍රමුලධර්ම මගින්  $\sqrt{1-x^2}$  හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.  
(ii)  $y = \tan^{-1} \frac{1}{1-x^2}$  සහ  $z = \sin^{-1} x$  නම්  $\frac{dy}{dz}$  සොයන්න.

(iii)  $x = \sqrt{1-x^2}$  ද  $x$  හි ශ්‍රිතයක්  $y$  ද වේ.  
 $\frac{dy}{dz}$  සහ  $\frac{d^2y}{dz^2}$  මගින්  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ප්‍රකාශ කරන්න.  
 $(1-x^2) \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + z^2 y = 0$  නම්  
 $x \neq 0$  සඳහා  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  බව සාධනය කරන්න.

9. (i)  $x = \pi - y$  අදේශ කිරීමෙන්  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  අනුකලය 0 සහ  $\frac{\pi}{2}$  සීමා අතර අනුකලයකට පරිණාමනය කරන්න.

ඒ නසින්, 
$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

- (ii)  $m$  සහ  $n$  ධන නිඵල වන විට,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(2m+1)x dx = (-1)^m \frac{n}{(2m+1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

$$- \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin(2m+1)x dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නසින්

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 3x dx$$

අගයන්න.

10. (i) කෝටික අගයන් සහස්ත භාවිත කර (අ) ක්‍රමික නිතිය (ආ) සීමිත නිතිය යොදවීන්

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

දැමුණ 4 කට නිමානය කරන්න.

$x = \tan \theta$  අදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  අගයන්න. ඒ නසින් ඔබේ

නිමිත අගයෙහි නිරවද්‍යතාව නිර්ණය කරන්න. ( $\pi = 3.1416$  ලෙස ගන්න.)

- (ii) මැන්ලෝටින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර  $|x| < 1$  විට  $\ln(1+x)$  අගය ලේඛ ප්‍රසාරණයක් ලබා ගන්න. (සැ. යු.  $\ln = \log_e$ )

$y^{-4}$  පදය දක්වා  $y$  හි අවරෝහණ බලවල ලේඛයක් ලෙස  $\ln \frac{y}{y-1}$  ප්‍රසාරණය කර දැමුණක භාරකට නිවැරදි ව  $\ln 1.25$  සෙවීමට එම ප්‍රසාරණය භාවිත කරන්න.

11.  $x = 3t^2 + 1$   
 $y = 2t^3 - 1$

පරාමිතික සමීකරණවලින් නිරූපණය කෙරෙන වක්‍රයට  $t = \tan \alpha$  ධූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය  $y = x \tan \alpha - \tan^3 \alpha - \tan \alpha - 1$

බව පෙන්වා වක්‍රය අනුරේඛනය කරන්න.

$t = 1$  ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ස්පර්ශකයක් වන රේඛාව ද අනුරේඛනය කරන්න.

12.  $y^2 = 16x$  සහ  $3y = 4(4 - x^2)$  මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර එක ම සටහනෙහි අනුරේඛනය කර පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ ඒවායේ පරිමාණය ලක්ෂ්‍යය (1, 4) බව සත්‍යාපනය කරන්න.

පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ මෙම වක්‍ර දෙකෙන් හා  $x$ -අක්ෂයෙන් සෑදුණු වර්ගඵලය සොයන්න. මෙම වර්ගඵලය (i)  $x$ -අක්ෂය වටා ද (ii)  $y$ -අක්ෂය වටා ද භ්‍රමණය කළහොත් ජනනය කැරෙන පරිමාව සොයන්න.