සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ — 1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special — 1991)

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

01	
S	II

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි ලක්ෂ්‍යයක් O වේ. AO, BO, CO රේඛා BC, CA, AB පිළිවෙළින් D, E, F හි දී හමු වේ.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කර එය භාවිත කර ත්‍රිකෝණයක උච්ච ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

(ii) A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක් මත වේ. AB, BC, CA පාදවලට D සිට අඳින ලද ලම්බවල L, M, N අඩි සරල රේඛාවක් මත වන බව පෙන්වන්න.

2. $OABC$ චතුස්තලයක OA, OB, OC දාර අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වේ. $OA = a,\ OB = b$ සහ $OC = c$ නම්

$$\cos B\hat{A}C \ \cos C\hat{B}A \ \cos A\hat{B}C = \frac{a^2\, b^2\, c^2}{(b^2 + c^2)\,(c^2 + a^2)\,(a^2 + b^2)}$$ බව සාධනය කරන්න.

චතුස්තලයේ OBC සහ ABC මුහුණත් අතර කෝණය θ නම්

$$\cos\theta = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

බව පෙන්වන්න.

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

රොම්බසයක එක කෝණයක් 2α වන අතර මෙම කෝණය සමච්ඡේද කරන විකර්ණය $ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$ රේඛාව මත වේ. $(0, 0)$ මූල ලක්ෂ්‍යය එක් ශීර්ෂයක් නම් අනෙක් ශීර්ෂ තුනෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

4. $A\,(2a, 0)$, $B\,(0, 2b)$ සහ $C\,(a + b,\ a + b)$ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S වේ; මෙහි a සහ b ධන සංඛ්‍යා වේ. $P(2a, 2b)$ හරහා S යන බව පෙන්වන්න. B හි ද P හි ද වෘත්තයට ස්පර්ශක Q හි දී හමුවේ නම් $PQ = \dfrac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$ බව පෙන්වන්න.

S වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරමින් $ax + by + c = 0$ $(c > 0)$ සරල රේඛාව ද ස්පර්ශ කරන වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ පථය පරාවලයක් බවත් එහි නාභිය (a, b) ද නියාමකය $ax + by + c + a^2 + b^2 = 0$ ද බවත් පෙන්වන්න.

5. (i) ධ්‍රැවීය සමීකරණ පිළිවෙළින් $r = 2a\cos\theta$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ සහ $r = a\,(1 + \cos\theta)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ වන C_1 සහ C_2 වක්‍ර අනුරේඛනය කරන්න.

C_1 සහ C_2 ට පොදු වූ ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවීය ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි, $x^2 + y^2 - 8 = 0$, $y^2 - 7 = 0$ සහ $y^2 - 7x = 0$ වක්‍ර ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අනුරේඛනය කරන්න.

xy තලයේ $(x^2 + y^2 - 8)\,(y^2 - 7x)\,(y^2 - 7) \leqslant 0$ වන R පෙදෙස අඳුරු කරන්න. R පෙදෙස තුළ, $x^2 + y^2 - 8$ හි අඩුතම අගය සොයන්න. R හි දී $x^2 + y^2 - 8$ හි වැඩිතම අගය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයේ $A_i\,(at_i^2, 2at_i)$ සහ $A_j\,(at_j^2, 2at_j)$ ලක්ෂ්‍යයන්හි දී ස්පර්ශකයන්ගේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යක් වන A'_k හි ඛණ්ඩාංක

$$at_it_j,\ a(t_i + t_j) \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \quad i \neq j \neq k)$$ වන බව පෙන්වන්න.

$A_2'A_3'$, $A_3'A_1'$ සහ $A_1'A_2'$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාද නම් A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', අචල ලක්ෂ්‍යයක දී ඒකලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

7. ඉලිප්සයක ලක්ෂ්‍ය $(a \cos \theta,\ b \sin \theta)$ මගින් පරාමිතික ව නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. ඉලිප්සයක අන්තර්ගත චතුරස්‍රයක $P_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ ශීර්ෂවලට පිළිවෙලින් $\theta_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ පරාමිති තිබේ. P_1P_2 සහ P_3P_4 සමාන්තර නම් $\theta_1 + \theta_2$ සහ $\theta_3 + \theta_4$ එක්කෝ සමාන වන බව නැතහොත් 2π වලින් වෙනස් වන බව පෙන්වන්න. P_1P_4 හා P_2P_3 යන එක් එක් රේඛාවට සමාන්තර ලෙස ඉලිප්සයට ස්පර්ශක යුගල ඇඳ තිබේ. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය හතර සමාන්තරාස්‍රයක ශීර්ෂ වන බවත් ප්‍රතිමුඛ පාද යුගලයක් P_1P_2 රේඛාවට හෝ P_3P_4 රේඛාවට හෝ සමාන්තර වන බවත් පෙන්වන්න.

8. $xy = c^2$ සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද අභිලම්බයේ සමීකරණය සොයන්න.

P හි අභිලම්බය බහුවලය නැවත හමුවන Q ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. PQ විෂ්කම්භයක් වන වෘත්තය C හි දී නැවත බහුවලය හමුවේ. PC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය මූලය බව පෙන්වන්න.

9. මතු දක්වෙන සමීකරණ විසඳා සාධාරණ ආකෘතියෙන් විසඳුම් දෙන්න.

(i) $39 \cos x + 52 \sin x = 60$

(ii) $\sin 3x - 2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$

(iii) $\cos x - \cos 2x = \frac{1}{2}$

10. සුපුරුදු අංකනය භාවිත කර ABC ත්‍රිකෝණයක $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ බව සාධනය කරන්න.

(i) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි C ගෙන් ඈතින් ඇති පැත්තේ AB මත ABC_1 සමපාද ත්‍රිකෝණය ඇඳ ඇත.

$$CC_1^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\,\Delta$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය Δ වලින් දක්වා ඇත.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයක $a = 4$, $b = 3$ ද A සහ B හරහා මධ්‍යස්ථ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ ද වේ. $\cos C = \frac{5}{6}$ බව පෙන්වන්න.

11. (i) A සහ B නම් ගම් දෙකක ආදායම පිළිබඳ විස්තර පහත දක්වේ.

	A ගම	B ගම
මිනිසුන් සංඛ්‍යාව ...	600	500
මධ්‍යනය ආදායම ...	175	186
විචලතාව	100	81

(අ) ගම් දෙකම එකට ගත් කල මුළු ආදායම සොයන්න.

(ආ) ගම් දෙකම එකට ගත් කල මධ්‍යනය ආදායම සොයන්න.

(ඉ) සංයෝජිත සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(ඊ) ආදායමෙහි විචලනය වඩා විශාල වන්නේ කවර ගමෙහි ද?

(ii) විචල්‍යයක පාඨාංක 50 ක මධ්‍යනය 7.43 ද සම්මත අපගමනය 0.28 ද විය. 6.80, 7.81, 7.58, 7.70, 8.05, 6.98, 7.78, 7.85, 7.21 සහ 7.40 අතිරේක පාඨාංක 10 ක් භාවිතා කිරීමට ලැබුනේ ය. මුල් පාඨාංකවලට මේවා ඇතුල් කරන ලද්දේ නම්, පාඨාංක 60 සහිත සම්පූර්ණ කුලකයේ

(අ) මධ්‍යනය,

(ආ) සම්මත අපගමනය

සොයන්න.

12. (i) සර්වසම නොනැඹුරු කාසි පහක් උඩ දමනු ලැබේ.

(අ) හරියට ම මුහුණු තුනක්

(ආ) අවම වශයෙන් මුහුණු තුනක්

උඩ අතට වැටීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) නොනැඹුරු කැට දෙකක මුහුණතවල එකක එක බැගින් 2, 3, 4, 6, 8, 12 අංක ලකුණු කර ඇත. ඒවා එකවිටම උඩ දමනු ලැබුවහොත් උඩ අතට වැටෙන මුහුණතවල දක්නට ලැබෙන සංඛ්‍යාවල ගුණිතය 24 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) කුරුමානම්කරුවෙකු ඉලක්කයකට වෙඩි තැබීමේ සම්භාවිතාව 5/6 වේ. ඔහු 20 වරක් වෙඩි තැබුවහොත් ඉලක්කයට වැදීමේ සම්භාවිතාව වැඩිම වන වාර ගණන සොයන්න.