

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු  
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01). ශුද්ධ ගණිතය I  
(01) Pure Mathematics I

01	
S	I

පැ තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i)  $f(r) = \frac{1}{r^2} (r + 0)$  නම්,

$$f(r + 1) - f(r) = - \frac{(2r + 1)}{r^2(r + 1)^2}$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නමින්,

$$\frac{3}{12 \cdot 2^2} + \frac{5}{22 \cdot 3^2} + \frac{7}{32 \cdot 4^2} + \dots$$

ප්‍රේෂණය පළමුවැනි පද  $n$  හි අවකාශ සොයන්න.

ඉහත ප්‍රේෂණය අභියාචිත වේ ද? ඔබේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

(ii)  $|x| < 1$  සඳහා,

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

ප්‍රතිඵලය උපකල්පනය කිරීමෙන්

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{r(r+1)}$  ඒකාස්‍රය භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීමෙන්,

$$S_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

බව පෙන්වන්න.

$n \rightarrow \infty$  විට,  $S_n \rightarrow 1 - \ln 2$  බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i)  $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$  වන පරිදි වූ  $x$  හි අගය පරාස සොයන්න.

(ii)  $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} n (e^x + e^{-x})$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $n (\geq 2)$  යනු නියතයකි.

$t = e^x$  යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

(අ)  $y$  හි අවම අගය  $\sqrt{n^2 - 1}$  බව පෙන්වන්න.

(ආ)  $k > \sqrt{n^2 - 1}$  නම්,  $y = k$  සමීකරණයට,  $t$  සඳහා තාත්කලීය මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.

(ඇ)  $k = \sqrt{2n(n+1)}$  විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය  $1 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$  බව පෙන්වා, වඩා කුඩා මූලය ලියන්න.

ඉහත දක්වූ අවමයට වඩා වැඩි,  $y = k$  සමීකරණය සපුරාලන  $x$  හි තාත්කලීය අගයන් දෙක,  $n (\geq 2)$  හි කවර අගයක් සඳහා වුව ද,

$\log_e \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)$  සහ  $\log_e (\sqrt{2} + 1)$  අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

[ අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i)  $f(x, y, z) \equiv x^4(y - x) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$  හි සාධකයක්  $(x - y)$  බව පෙන්වන්න. ඒ නැතිව, ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට බිඳින්න.

$x, y, z$  වූ කලී ඒවායෙන් ඕනෑම දෙකක් එකිනෙකට සමාණ නොවන පරිදි වූ තාත්කලීක සංඛ්‍යා නම්,  $f(x, y, z)$  ශුන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(ii)  $ax^3 + bx + c$  ප්‍රකාශනයට  $x^2 + px + 1$  ආකාරයේ සාධකයක් ඇත් නම්,  $a^2 - c^2 = ab$  බව පෙන්වන්න.

මෙම අවස්ථාවෙහිදී,  $ax^3 + bx + c$  සහ  $cx^3 + bx^2 + a$  ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුඛවර ප්‍රමේයය උපකල්පනය කරමින්, සෑම නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා එය සාධනය කරන්න.

(i) මතු දැක්වෙන දෑ සුළු කිරීම සඳහා, අනන්‍ය ප්‍රමේයය භාවිත කරන්න.

(අ)  $(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3 (\cos \theta + i \sin \theta)^2$

(ආ)  $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) (\cos 4\theta - i \sin 4\theta)$

(ii)  $(\sqrt{5} + 2i)^n$  යන්න  $r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි  $n$

නිඛිලය වන අතර  $\theta$  යනු  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  වන පරිදි වූ සුළු කෝණයක් වේ.

ඒ නැතිව, සියලුම  $n$  සඳහා  $(\sqrt{5} + 2i)^n + (\sqrt{5} - 2i)^n$  තාත්කලීක බව පෙන්වන්න.

$n = 6$  වට මෙම ප්‍රකාශනයෙහි අගය සොයන්න.

5.  $z_1, z_2, z_3$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආභන්ධ සංහතෙහි පිළිවෙලින්  $P_1, P_2, P_3$  ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි ආපාතය සහ විස්තාරය පනාමිතීකව විචරණය කරන්න.}$$

තව ද,  $z_1', z_2', z_3'$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආභන්ධ සංහතෙහි පිළිවෙලින්  $P_1', P_2', P_3'$  ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$$\frac{z_1' - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_2' - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3' - z_2}{z_1 - z_2} \text{ නම්,}$$

එවිට  $P_2 P_3 P_1', P_3 P_1 P_2', P_1 P_2 P_3'$  ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.

තව ද,  $P_1 P_2 P_3$  සහ  $P_1' P_2' P_3'$  ත්‍රිකෝණයන්ට එක ම කේන්ද්‍රකයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න.

6. (i) ENGINEERING යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල යොදා ගැනීමෙන් ලබා ගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඒවා අතුරින් කොපමණ සංඛ්‍යාවක  $E$  අක්ෂර තුන ම එකට එක්වී පිහිටා තිබේද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක ඒවා මුලටම පවතී ද?

(ii) පත්‍රිකා 32 කින් සමන්විත කාණ්ඩයක පත්‍රිකා 8 ක් කරපාට ද, 8 ක් රතුපාට ද, 8 ක් නිල්පාට ද 8 ක් කොළපාට ද වේ. එක ම පාට පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

(අ) එම කාණ්ඩයෙන් පත්‍රිකා තුනක් සමභිතවී ලෙස තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර ගණන සොයන්න.

(ආ) (අ) හි වූ තේරීම අතුරින්, පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වූ පාටවලින් තෝරවනීය ලෙස වූ තේරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(සැ. යු. සියලු ම ආභණන කායනී පැහැදිලි වී දැක්විය යුතු වේ.)

7. ධන නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

(i)  $\sum_{r=1}^n r^n C_r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1}$

බව පෙන්වන්න.

(ii)  $n(1+x)^{n-1}$  සහ  $(1+x)^n$  හි ප්‍රසාරණවල ගුණිතය සැලකීමෙන්,  $\sum_{r=1}^n r^n (C_r)^2$  යන්න  $n(1+x)^{2n-1}$

ප්‍රසාරණයේ  $x^{n-1}$  හි සංගුණකයට සමාන බව පෙන්වන්න.

(iii)  $\sum_{r=1}^n r^n (C_r)^2 = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. (i)  $u$  සහ  $v$  යනු  $x$  හි අවකලන ශ්‍රිත නම්,  $u, v$  සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන්  $\frac{d}{dx}(uv)$  සඳහා සූත්‍රයක් ප්‍රමුච්චම්වලින් ලබා ගන්න.

(ii)  $y = \frac{u}{v}$  නම්, ලඝුගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන්

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii)  $y = \frac{u_1 u_2 \dots u_n}{v_1 v_2 \dots v_n}$  නම්,

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} - \frac{1}{v_i} \frac{dv_i}{dx} \right)$$

බව පෙන්වන්න, මෙහි  $u, v$  ආදිය  $x$  හි අවකලන ශ්‍රිත වේ.

(iv)  $\tan^{-1} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$  යන්න  $\tan^{-1} x$  විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

9. (i) 
$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින්, 
$$\int_0^{\pi} x \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^n x dx$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි  $n$  යනු ධන නිඛිලයකි.  
තව ද,  $n \geq 2$  වීම,

$$n \int_0^{\pi} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x dx$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඒ නමින්,

$$\int_0^{\pi} x \sin^4 x dx \quad \text{සහ} \quad \int_0^{\pi} x \sin^5 x dx$$

අගයන්න.

(ii)  $\frac{d}{d\theta} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) = \sec \theta$  බව පෙන්වන්න.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} \quad \text{සෙවීමට එය භාවිත කරන්න.}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}} \quad \text{ඇගයීම සඳහා}$$

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2} \quad \text{ආදේශය භාවිත කරන්න.}$$

10.  $y = \tan^{-1} x$  නම්  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  සහ  $\frac{d^3y}{dx^3}$  රාශි  $x$  ඇසුරෙන් පෙන්වන්න.

$x^3$  පදය හතක්,  $\tan^{-1} x$  හි මැන්ලෝටින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

එව ද, සියලුම තත්ත්වික  $x$  සඳහා,  $y = \tan^{-1} x$  හි  $\left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$  ප්‍රස්ථාරයේ කවුඩ්ගතක් ඇඳ වක්‍රයේ වැඩිමකම බෑවුම සඳහන් කරන්න. එම සටහනෙහිම,  $y = kx$  රේඛාව ද අඳින්න; මෙහි  $k$  යනු තත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නසින්,  $\tan^{-1} x = kx$  සමීකරණයට

(අ) ප්‍රතිත්ත මූල තුනක් නිශ්චය සඳහා.

(ආ) එක් මූලයක් පමණක් නිශ්චය සඳහා,

$k$  හි අගයන් පිහිටිය යුතු පරාස ලියන්න.

$\tan^{-1} x$  සඳහා ඔබ ලබාගත් මැන්ලෝටින් ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්,  $12 \tan^{-1} x = 11x$  සමීකරණයට

0.5 ට ආසන්න වූ මූලයක් නිශ්චය කිරීමට පෙන්නවන්න.

11.  $C$  වක්‍රයක්  $x = t + 1$ ,  $y = t^3 - t$  පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබේ.

(i)  $C$  හි භෞමි ලක්ෂණ පෙන්වා ඒ එක එකක් අනුරූප වන්නේ උපරිමයකට ද අවමයකට ද නැතිවර්තනයකට ද යන්න සඳහන් කරන්න.

(ii)  $C$  හි කවුඩ්ගතක් අඳින්න.

(iii) ඒ නසින්,

(අ)  $x = t^3 - t$ ,  $y = t + 1$  පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන  $C'$  වක්‍රයේත්,

(ආ)  $x = t + 1$ ,  $y = |t^3 - t|$  පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන  $C'$  වක්‍රයේත් කවුඩ්ගතක් අඳින්න.

12.  $y^2 = 4x$  පරාවලයේත්  $x^2 - y^2 = 1$  බහුවලයේත්  $x = 4$  රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එක ම රූ සටහනෙහි අඳින්න.

(i)  $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$  සහ  $y^2 - 4x \leq 0$  වන සේ වූ  $S_1$  පෙදෙස සටහන් කර,  $S_1$  න් පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න.

(ii)  $S_2$  යනු  $y^2 = 4x$  පරාවලයෙන් හා  $x = 4$  රේඛාවෙන් පර්යන්තගත පෙදෙසයි.  $S_2$  වර්ගඵලය,  $x = 4$  රේඛාව ට වටා යාපු ගන්ණ භතරකින් හුම්ණය කිරීමෙන් පනනය වන සහයේ පරිමාව පෙන්වන්න.