15706

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය I Pure Mathematics I	S / I	

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) $u_r = r(r+1)$ යැයි සිතමු

$\sum_{r=1}^{n} u_r$ සහ $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{u_r}$ සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{u_r}$ අභිසාරී වුව ද $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$a_r = \frac{r^2(r^2+1) + 2(r^3-1)}{r(r+1)}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන a_r, r වැනි පදය ලෙස ඇති ශ්‍රේණියේ මුල් n පදවල ඓක්‍යය සොයන්න.

තව ද, $\sum_{r=1}^{n} a_r$ අභිසාරී නොවන බව ද පෙන්වන්න.

(b) S_n යනු

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots$$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය යැයි ගනිමු.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)\,2^n}$$

බව පෙන්වන්න.

2. (a) $x^2 > |5x+6|$ වන පරිදි වූ x හි අගයන් සොයන්න.

(b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයා එනයින්, ඕනෑම සෘණ නොවන x, y, z සඳහා

$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ බව පෙන්වන්න.

ධන p, q, r සඳහා

(i) $\frac{1}{3}(p + q + r) \geq \sqrt[3]{pqr}$

(ii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$

(iii) $\frac{p}{q+r} + \frac{q}{r+p} + \frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. (a) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α සහ β වේ; මෙහි b සහ c තාත්ත්විකය.

α^3 සහ β^3 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න.

$b^3 - 6b + 9 = 0$ සහ $c = 2$ නම්, α සහ β හි තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

එනයින්, $y^3 - 6y + 9 = 0$ හි තාත්ත්වික මූලය සොයන්න.

(b) x සහ k තාත්ත්වික නම්, සියලු ම x සඳහා

$$0 \leq \frac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}(k^2 - k + 1)$$

බව පෙන්වා, $\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ප්‍රකාශනය, එහි කුඩාතම හා විශාලතම අගයන් ගන්නා x හි අගයන් ලබා ගන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මූවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ යැයි සිතමු. α^r $(r = 1, 2, 3, 4)$ යනු $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල බව පෙන්වන්න.

$\alpha + \alpha^4$ සහ $\alpha^2 + \alpha^3$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය සොයා, එනයින් $\cos 72°$ හි අගය සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය සහ විස්තාරය අර්ථ දක්වන්න.

ආර්ගන් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යය z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. z^2 නිරූපණය කැරෙන Q ලක්ෂ්‍යය ජ්‍යාමිතික ලෙස නිර්මාණය කරන්නේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය (1, 0) සහ ඒකක අරයෙන් යුත් වෘත්තය මත P පිහිටයි නම්,

(i) $|z^2 - z| = |z|$

(ii) විස්. $(z - 1)$ = විස්. $z^2 = \frac{2}{3}$ විස්. $(z^2 - z)$

බව ජ්‍යාමිතිකව පෙන්වන්න.

6. (a) මුදල් පසුම්බියක රුපියල් පහේ කාසි 1 ක් ද රුපියල් දෙකේ කාසි 2 ක් ද රුපියලේ කාසි 3 ක් ද ශත පහේ කාසි 4 ක් ද අඩංගු වේ. කාසි 3 ක් තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර කොපමණ ද?

(b) *HOMOGENEOUS* යන වචනයෙහි අක්ෂර (වරකට සියල්ලම ගනිමින්) 3 326 400 ආකාරයකින් පිළියෙල කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මේවායින් කොපමණක් ව්‍යංජනාක්ෂරයකින් පටන්ගෙන ඒවැන්නකින් අවසාන වේ ද? (ව්‍යංජනාක්ෂරයක් යනු *A, E, I, O, U* හැර අන් ඕනෑ ම අක්ෂරයකි.)

(c) (i) සංඛ්‍යාංකයන්හි පුනරාවර්තනවලට ඉඩ තිබේ නම්

(ii) සංඛ්‍යාංකයක පුනරාවර්තන දෙකකට වඩා ඉඩ නොමැති නම්

0, 1, 4, 5, 6, 7 සංඛ්‍යාංකවලින් (ශූන්‍යයෙන් ආරම්භ වන සංඛ්‍යා නොසැලකූ විට) සංඛ්‍යාංක හතරකින් යුත් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.

7. n ධන නිඛිලයක් විට, $(1 + x)^{2n}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණයේ මැද පදය

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\,2^n x^n$$

බව පෙන්වන්න.

එම ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදයට විශාලතම සංගුණකය තිබෙන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න; x ධන යැයි උපකල්පනය කරන්න.

8. (a) $x \neq 0$ විට, ප්‍රථමධර්ම මගින් $\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ලබාගන්න.

(b) $y = e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ λy ආකාරයෙන් $\frac{d^3y}{dx^3}$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න;
මෙහි λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

(c) $x = \sin\theta$ සහ $y = \sin n\theta$ යැයි ගනිමු; මෙහි n නියතයක් ද $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ද වේ.
n සහ θ ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ලබා ගෙන, එනයින්

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

බව පෙන්වන්න.

9. (a) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\int \frac{(1 + x^2)}{1 + x^4}\,dx$ අනුකලය අගයන්න.

(b) n ධන නිඛිලයක් යැයි සිතමු.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx = 0$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

තවද, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}\,dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

10. (a) ඕනෑම දර්ශකයක් සඳහා වූ ද්විපද ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, දශමස්ථාන 5 කට නිවැරදිව, $\sqrt{24}$ හි අගය සොයන්න.

(b) $f(x) = \ln \cos x$ නම්

$$f^{(3)}(x) + 2f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) = 0$$

බව සාධනය කරන්න; මෙහි $f^{(r)}(x) = \dfrac{d^r f(x)}{dx^r}$.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $f(x)$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය x^4 හි පදය තෙක් ලබාගන්න.

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ලෙස ගෙන, $\ln 2$ ආසන්න වශයෙන් $\dfrac{\pi^2}{16}\left(1 + \dfrac{\pi^2}{96}\right)$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.

11. සියලු ම තාත්ත්වික t සඳහා,

$$x = \frac{1}{t^4 + 3} \quad \text{සහ} \quad y = \frac{t}{t^4 + 3}$$

පරාමිතික සමීකරණවලින් C වක්‍රයක් දී ඇත.

(i) t ට එරෙහි ව x ද

(ii) t ට එරෙහි ව y ද

ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ස්පර්ශකය ඛණ්ඩාංක අක්ෂවලට සමාන්තර වන ලක්ෂ්‍ය පෙන්වමින් C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y^2 = 3x(1 - x)^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(i) $0 \le x \le \dfrac{1}{3}$ සඳහා, ඉහත වක්‍රයේ ප්‍රථම වෘත්ත පාදයෙහි ඇති කොටස C යැයි සිතමු. x අක්ෂය, $x = \dfrac{1}{3}$ රේඛාව සහ C මගින් අන්තර්ගතවන S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) y අක්ෂය වටා රේඩියන් 2π කෝණයකින් S භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයෙහි පරිමාව සොයන්න.