සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

15706

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය II Pure Mathematics II	S / II	පැය තුනයි Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) සෙවා ප්‍රමේයයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA, AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E, F වන අතර L, M, N යනු A, B, C සිට පිළිවෙළින් EF, FD, DE ට අඳිනු ලැබූ ලම්බවල අඩි වේ. DL, EM, FN ඒකලක්ෂ්‍ය බව සාධනය කරන්න.

(ආ) ABC ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය H ද BC, CA, AB මත H හි ප්‍රතිබිම්බ පිළිවෙළින් P, Q, R ද වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය මත P, Q, R පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

2. AB පාදය CD ට සමාන්තරව ද $A\hat{D}C = B\hat{C}D = \beta$ ද වන $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ, එහි DC පාදය තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ ද ත්‍රපීසියමේ තලය මේසය සමග α කෝණයක් සාදන සේ ද තබා ඇත. A සහ B සිට මේසයට අඳිනු ලැබූ අභිලම්බ පිළිවෙළින් E සහ F වෙයි. θ යනු මේසයට AD හි ආනතිය නම්,

$$\sin\theta = \sin\alpha\sin\beta$$

බව සාධනය කර α සහ β ඇසුරෙන් $E\hat{D}C$ කෝණයේ සයිනය සොයන්න.

$DC = 3AB$ නම්, තිරසට DB හි ආනතිය

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

3. $y = ax + b$ සරල රේඛාව, $y = mx$ සහ $y = m'x$ රේඛා පිළිවෙළින් A සහ B හි දී ඡේදනය කරනු ලැබේ. මෙහි a සහ $b\ (\neq 0)$ නියත වේ. C ලක්ෂ්‍යය, $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වෙයි; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

(i) C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) $OACB$ රොම්බසයක් නම්,

$(a^2 - 1)(m + m') + 2a(1 - mm') = 0$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $OACB$ සමචතුරස්‍රයක් නම්, එහි වර්ගඵලය $\dfrac{2b^2}{1+a^2}$ බව පෙන්වන්න.

4. (අ) a සහ b නියත විට,

$$\frac{1}{r} = a \cos\theta + b \sin\theta$$

සමීකරණය, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන්, සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. ඉහත රේඛාව, $r = 2c\cos\theta$ වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.

(ආ) $y^2 - 4x \le 0$, $x^2 - 4y \le 0$ සහ $x + y - 3 \ge 0$ වන පරිදි, xy තලයෙහි පිහිටි R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

R හි දී $x + 2y$ හි අඩුතම අගය සොයන්න.

5. $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ සහ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත වශයෙන් ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

බව පෙන්වන්න.

O මූලලක්ෂ්‍යයේ සිට $S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයට විචල්‍ය ජ්‍යායක් අඳිනු ලැබේ; මෙහි a සහ r ධන වේ.

(i) $r \ge a$ සහ (ii) $r < a$ අවස්ථාවන්හි දී වෙනස පැහැදිලිව සඳහන් කරමින්, ඉහත කී ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න.

$r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ විට ඉහත පථය ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලය මත පිහිටි, t_1 සහ t_2 පරාමිති සහිත ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කෙරෙන ජ්‍යායෙහි සමීකරණය සොයන්න. මෙම ජ්‍යාය නාභිය හරහා යයි නම්, $t_1 t_2 + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත පරාවලයේ AB නාභිය ජ්‍යායක M මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා, AB ට සමාන දිගක් සහිතව එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද M වන පරිදි x අක්ෂයට සමාන්තරව PQ රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. P හි x ඛණ්ඩාංකය Q හි x ඛණ්ඩාංකයට වඩා කුඩා නම්, P හිත් Q හිත් පථ පිළිවෙළින් $x = -a$ සරල රේඛාවක් $y^2 = a(x - 3a)$ පරාවලයක් බව පෙන්වන්න.

7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටි, විකේන්ද්‍රික කෝණ θ සහ ϕ වූ P, Q ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන රේඛාවේ සමීකරණය

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta + \phi}{2} = \cos\frac{\theta - \phi}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

එනයින්, P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියා P හි දීත් Q හි දීත් ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

A, B, C යනු AB සහ BC අචල දිශාවනට පවතින සේ, ඉලිප්සයක් මත වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍ය තුනකි. A සහ C හි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය ඉලිප්සයක් බව පෙන්වන්න.

8. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවලයක සමීකරණය $xy=c^2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වා සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවලයේ දී ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යා කෙරෙන ජ්‍යායෙහි සමීකරණය සොයන්න.

P_1, P_2, P_3 යනු ඉහත බහුවලය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍ය තුනක් වන අතර H යනු $P_1P_2P_3$ ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රයයි. H හි ඛණ්ඩාංක ලබාගෙන, H ලක්ෂ්‍යය බහුවලය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

U සහ V යනු පිළිවෙළින් P_1H සහ P_2P_3 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. UOV කෝණය $=\frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

9. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක Δ වර්ගඵලය, $\Delta=\frac{1}{2}\,bc\,\sin A$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තවද,

$$\frac{\Delta}{\tan\frac{A}{2}} + \Delta\tan\frac{A}{2} = bc \quad \text{බවත්}$$

$$\frac{\Delta}{s\tan\frac{A}{2}} + s = b + c \quad \text{බවත්}$$

සාධනය කරන්න; මෙහි $2s = a + b + c$.

(ආ) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා,

$$\tan A\hat{O}H = \frac{|\sin 2B - \sin 2C|}{1+\cos 2B + \cos 2C}$$

බව සාධනය කරන්න; මෙහි O සහ H යනු පිළිවෙළින් ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ.

10. (අ) විසඳන්න.

(i) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1.$

(ආ) $\sin\frac{x+y}{2} = u$ සහ $\cos\frac{x-y}{2} = v$ නම්,

$$\sin x + \sin y = \sqrt{2},$$

$$\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}$$

යන සමගාමී සමීකරණ

$$uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$$

ලෙස උනනය වන බව පෙන්වන්න.

එනයින්, දී ඇති සමගාමී සමීකරණ x සහ y සඳහා විසඳන්න.

11. A සහ B යනු, සසම්භාවී පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශයක් හා ආශ්‍රිත සිද්ධි අවකාශයට අයත් ඕනෑම සිද්ධි දෙකකි. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

බව පෙන්වන්න.

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වන තෙක්, නිර්දෝශ කාසියක් විසිකරනු ලැබේ. පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය ලියන්න.

එක් එක් අවස්ථාව සඳහා

(i) r වැනි විසිකිරීමේ දී

(ii) ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් සහිත විසිකිරීමක දී

(iii) 3 න් බෙදෙන විසිකිරීමක දී

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

12. X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයට පහත දක්වෙන වගුවේ දී ඇති ආකාරයේ, සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් ඇත : මෙහි a නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$P[X = x]$	.05	a	.06	$(1 - a)^2$	.10

X සඳහා සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වා, ඒවා සොයන්න.

මෙම X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති එක එකක් සඳහා, X හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.

$Y = X^2$ යැයි ගනිමින්, X ට සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් තිබූ නමුත් Y ට ඇත්තේ එක් සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

Y හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.