සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1995 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

01	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. මෙනලාවුස් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශකරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයකි. D, E, F යනු, $\frac{BD}{DC} = \lambda$, $\frac{CE}{EA} = \mu$ සහ $\frac{AF}{FB} = \upsilon$ වන පරිදි පිළිවෙළින් BC, CA, AB පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ; මෙහි λ, μ, υ ධන නියත වේ. X, Y, Z යනු පිළිවෙළින් BE සහ CF, AD සහ CF, BE සහ AD රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වේ.

AFC ත්‍රිකෝණය සහ BE රේඛාව සැලකීමෙන්,

$$\frac{CX}{CF} = \frac{\mu(1+\upsilon)}{1+\mu(1+\upsilon)}$$

බව සාධනය කරන්න.

තවද, $\frac{\Delta BXC}{\Delta ABC} = \frac{\mu}{1+\mu(1+\upsilon)}$ බව ද සාධනය කරන්න.

$$\frac{\Delta XYZ}{\Delta ABC} = \left[1 - \frac{\lambda}{1+\lambda(1+\mu)} - \frac{\mu}{1+\mu(1+\upsilon)} - \frac{\upsilon}{1+\upsilon(1+\lambda)}\right]$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, සේවා ප්‍රමේයයේ විලෝමය සාධනය කරන්න.

2. (i) $OABCD$ පිරමිඩයක ආධාරකය $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ; මෙහි $AB = 2a$, $BC = 4a$ සහ $B\hat{A}D = 60^\circ$ ද වේ. OAB මුහුණත සමපාද වන අතර එය ආධාරකයට ලම්බ වේ. E සහ F යනු පිළිවෙළින් AB සහ AO දාරවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. OE සහ DF අතර කෝණය $\tan^{-1}(\sqrt{19})$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $XYZWV$ පිරමිඩයේ $XYZW$ ආධාරකය සමචතුරස්‍රයකි. VXY සහ VYZ මුහුණත් ආධාරකයේ තලයට ලම්බ වේ. VXW හා VZW යන ඉතිරි මුහුණත් දෙක ආධාරකය සමග සමාන α කෝණ සාදයි. VXW හා VZW මුහුණත් දෙක අතර ද්විතල කෝණය $\cos^{-1}(-\cos^2\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

3. $l_1 \equiv ax + by + c = 0$ සහ $l_2 \equiv a'x + b'y + c' = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය

$ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි λ නියතයකි.

$l_3 \equiv lx + my + n = 0$ විචල්‍ය රේඛාව l_1 සහ l_2 රේඛා පිළිවෙළින් A හි දී හා B හි දී ඡේදනය කරයි. c, c' දෙකම නිශ්ශූන්‍ය වන අතර ඛණ්ඩාංක මූල O ය.

OA රේඛාව OB ට ලම්බ නම් $(aa' + bb')n^2 - (ac' + ca')ln - (bc' + cb')mn + (l^2 + m^2)cc' = 0$ බව පෙන්වන්න;

P යනු O සිට $lx + my + n = 0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩියයි. ඉහත දක්වෙන අවශ්‍යතාව සපුරාලයි නම්, l_3 රේඛාව විචලනය වන්ම P හි පථය, වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න.

l_1 සහ l_2 රේඛා එකිනෙකට ලම්බ නම්, එම පථයට කුමක් වේ ද?

[අ පිට බලන්න.

4. (i) ඒකක අරයයන් යුත්, කේන්ද්‍ර P, Q වූ වෘත්ත දෙකක් A, B ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය වන්නේ එකක කේන්ද්‍රය අනිකෙහි පරිධිය මත පිහිටන සේ ය. $A\widehat{P}B$ කෝණය නිර්ණය කර, වෘත්ත දෙකටම පොදු R පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

PQ හි මධ්‍යලක්ෂ්‍යය O මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස ද PQ රේඛාව x අක්ෂය ලෙසද y අක්ෂය ලෙස AB ද ගනිමින්, R හි පිහිටි $X(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක x, y ඛණ්ඩාංක සපුරාලිය යුතු අසමානතා කුලකයක් ලියන්න.

(ii) p සහ α යනු $p > 0$ සහ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ පරිදි වූ නියත වේ. කාටීසියානු ආකාරයට නොහරවා,

$r = \dfrac{p}{\cos\theta\ \sin\alpha - \sin\theta\ \cos\alpha}$ ධ්‍රැවක සමීකරණය l සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

තවද, ධ්‍රැවක සමීකරණය $r = 2\cos\theta$ වන C වක්‍රයේ දළ සටහනක් ඇද C සහ l තාත්ත්වික ලක්ෂ්‍යවලදී ඡේදනය වීම සඳහා p සහ α අඩංගු අවශ්‍යතාවක් ලබාගන්න.

5. $ax + by = 1$ සරල රේඛාව P_1, P_2 ලක්ෂ්‍යවල දී $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය හමුවේ. O යනු ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යය යි. OP_1 හිත් OP_2 හිත් සමීකරණ පිළිවෙළින් $y = m_1x$ සහ $y = m_2x$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න; මෙහි m_1, m_2 යනු

$$(1 + 2fb + cb^2)\,m^2 + (2gb + 2fa + 2abc)\,m + ca^2 + 2ag + 1 = 0$$

වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.
මේ වෘත්තය, මූල ලක්ෂ්‍යය O හරහා යයි නම්

(i) O ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයේ C කේන්ද්‍රයට යාකරන රේඛාව

$$y = \frac{a(m_1 + m_2) - b(1 - m_1m_2)}{b(m_1 + m_2) + a(1 - m_1m_2)}\,x$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) f, g, a, b ඇසුරෙන් $(y - m_1x)(y - m_2x)$ අගයන්න.

ඒ නයින්, OP_1 හෝ OP_2 යන කවර රේඛාවක් මත පිහිටි ඕනෑම $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක

$$(1 + 2fb)\,y^2 + (2gb + 2fa)\,xy + (2ga + 1)\,x^2 = 0$$

සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

6. $P(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$$y + tx = 2at + at^3$$

බව සාධනය කරන්න.

Q යනු $(aq^2, 2aq)$ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $q^2 > 8$ නම්, සියල්ලම Q හරහා යනසේ, පරාවලයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න අභිලම්බ තුනක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

A සහ B යනු, එම ලක්ෂ්‍යවල අභිලම්බ Q හරහා යන සේ පරාවලය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. C යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යද D යනු CQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ. Q විචලනය වන්ම

(a) D හි පථය පරාවලයක කොටසක් බව ද

(b) $(-2a, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා AB යන බව ද

පෙන්වන්න.

7. P සහ Q වනාහි විකේන්ද්‍රික කෝණ පිළිවෙළින් θ සහ ϕ වූ, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. P හි දී සහ Q හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකවල T ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

ඉලිප්සය අන්තර්ගත වන සේ සමාන්තරාස්‍රයක් නිර්මාණය කර ඇත්තේ, P සහ Q හි ස්පර්ශක සමාන්තරාස්‍රයේ බද්ධ පාද වන පරිදි ය. සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ඡේදනය වන බව පෙන්වා, සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $4ab\,|\mathrm{cosec}\,(\theta - \phi)|$ බව සාධනය කරන්න.

සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය නියතව පවතින සේ P සහ Q ලක්ෂ්‍ය විචලනය වේ නම්, T හි පථය සොයන්න.

8. (a) $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ ලක්ෂ්‍යය $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ බහුවලය මත පිහිටන බව ද

(b) එම බහුවලය මත ඕනෑම (x, y) ලක්ෂ්‍යයක් $x = a \sec \theta,\ y = b \tan \theta$ යන්නෙන් θ පරාමිතියක් මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව ද පෙන්වා, එම පරාමිතිය මගින් සම්පූර්ණ බහුවලය විස්තර කිරීම සඳහා, θ හි කුඩාම පරාසයක් දෙන්න.

බහුවලය මත ලක්ෂ්‍යයකදී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

දී ඇති ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන සේ, සාධාරණ වශයෙන්, බහුවලයට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වා, එම ස්පර්ශක එකිනෙකට ලම්බ වීම සඳහා අවශ්‍යතාවක් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, බහුවලයට ඇඳි ලම්බ ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය, $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ වෘත්තය බව පෙන්වන්න.

බහුවලයක විකේන්ද්‍රිකතාව $\sqrt{2}$ ට වඩා වැඩිනම් තාත්ත්වික ස්පර්ශක දෙකක් එකිනෙකට ලම්බ විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

9. (i) සුපුරුදු අංකනයකින්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක, කුඩාම කෝණය A ද විශාලතම කෝණය C ද වන අතර $C = \frac{\pi}{2} + A$. පොදු අන්තරය d වන සමාන්තර ශ්‍රේණියක a, b, c පාද පිහිටයි.

$$\sin A = \frac{a}{\{2a^2 + 4ad + 4d^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

බව පෙන්වා $\cos A$ සහ $\cos 2A$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශන ලබාගන්න.

$$\frac{a}{d} = \sqrt{7} - 1$$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයකි. O සහ H පිළිවෙළින් එහි පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බකේන්ද්‍රය වේ. OH රේඛාව BC ට

$$\tan^{-1}\left(\frac{3 - \tan B \tan C}{\tan B - \tan C}\right)$$

කෝණයකින් ආනත වන බව පෙන්වන්න.

10. x සඳහා විසඳන්න :

(i) $3 \cos x - 4 \sin x = 5 \sin kx$; මෙහි k නියතයකි.

(ii) $4 - 4 (\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$.

(iii) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$; මෙහි $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$ සහ $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$.

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. (i) පුණ්‍ය කටයුතුවල යෙදෙන සංගමයක්, එක්තරා ගමක සිටින වයස අවුරුදු හැටකට වැඩි අයට මාසික දීමනාවක් ගෙවීමට තීරණය කරයි. දීමනා ක්‍රමය පහත දක්වේ.

වයස් කාණ්ඩය (අවුරුදුවලින්)	මාසික දීමනාව (රුපියල්වලින්)
60 – 65	80.00
65 – 70	85.00
70 – 75	90.00
75 – 80	95.00
80 – 85	100.00

ඉහතකී දීමනාවට සුදුසුකම් ඇති 25 දෙනෙක් එම ගමෙහි සිටිති. ඔවුන්ගේ වයස අවුරුදුවලින් මතු දක්වේ.

74	62	84	72	61	83	72	81	63	71	63	61	61
67	74	66	64	79	73	78	76	69	68	78	67	

ගෙවියයුතු මධ්‍යක මාසික දීමනාව සහ ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

(ii) කිසියම් පන්තියක ශිෂ්‍යයන් 80 කගේ X උසෙහි ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 135·3 cm සහ 9·6 cm වේ. $Y = \frac{X-a}{b}$ ආකාරයේ සුදුසු පරිණාමනයකින් X පරිණාමනය කළ විට, ශිෂ්‍යයන්ගේ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දක්වේ; මෙහි a සහ b නියතයන්ය.

Y හි අගය	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
සංඛ්‍යාතය	2	5	8	18	22	13	8	4

තථ්‍ය පන්ති ප්‍රාන්තර ගණනය කරන්න.

12. (i) එක්තරා නගරයක A, B, C නම් පුවත්පත් තුනක් ප්‍රසිද්ධ කරනු ලැබේ. වැසියන්ගෙන් 20% ක් A ද 16% ක් B ද 14% ක් C ද 8% ක් A සහ B ද 6% ක් A සහ C ද 4% ක් B සහ C ද 2% ක් පත්‍ර තුනම ද කියවන බව සමීක්ෂණයකින් නිමාණය වේ.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් කෙනෙකු

(a) එකම පත්‍රයක්වත් නොකියවීමේ
(b) C නොකියවීමේ
(c) A කියවන නමුත් B නොකියවීමේ
(d) අවුවශයෙන් පත්‍ර දෙකක්වත් කියැවීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) කිසියම් වර්ගයක එක් ශාකයක සිටින කෘමීන් සංඛ්‍යාව දක්වන X සසම්භාවී විචල්‍යය පහත දක්වෙන සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ගනී.

$X = x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0·10	1·8a	0·20	0·20	a^2	0·10

(a) වෙනත් අගයක් X නොගනී යැයි උපකල්පනය කර a සඳහා පිළිගත හැකි අගය ගණනය කරන්න.
(b) X හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.
(c) සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගත්, ඉහතකී වර්ගයේ ශාක 10 ක ගොඩකින් කෘමීන් නොමැති ශාක ගණන Y සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් දක්වේ. Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න. ඒ නයින්, Y හි මධ්‍යන්‍යය ද විචලතාව ද සොයන්න.