සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

16604

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1996 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1996 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1996

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

01	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (i) $V_r - V_{r-1} = 2r \ (r \ge 2)$ සහ $V_1 = 1$ නම්, $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$ භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $V_n = n^2 + n - 1$ බව පෙන්වන්න.

$U_r = \frac{V_r}{(r+2)!}$ යැයි දී ඇත් නම්, $f(r) - f(r+1) = U_r$ වන සේ $f(r)$ ශ්‍රිතයක් සොයා, ඒ නයින්

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$$

බව පෙන්වන්න.

$\sum U_r$ අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

(ii) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, $4.6^n + 5^{n+1}$ යන්න, 20 න් බෙදූ විට ශේෂය 9 බව ගණිත අභ්‍යුහනය මගින් සාධනය කරන්න.

2. (i) $(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)$ හි සාධක සොයන්න.

(ii) a, b, z, x සියල්ල ධන ද $z \ge x$ ද විට, $x^2y = az + bz^3$ නම්, එවිට $y \ge 2\sqrt{ab}$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $$\left| 3x - 4 \right| > 2 - 5x$$
වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

3. (i) a, b, c යනු $a \ne 0$ වන සේ වූ තාත්වික නියත විට, $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි α, β මූල තාත්වික වීම සඳහා අවශ්‍යතාවක් සොයන්න.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{සහ} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $(4\alpha - 3\beta)(4\beta - 3\alpha) = \frac{49ac - 12b^2}{a^2}$ බව ද පෙන්වා, $12b^2 < 49ac < \frac{49}{4}b^2$ නම්, $\frac{3\alpha}{4}$ සහ $\frac{4\alpha}{3}$ අතර β පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $p, q, r \ (p \ne 0)$ යනු තාත්වික නියත විට, $px^4 + qx^3 + rx^2 - qx + p = 0$ සමීකරණය y හි වර්ගජ සමීකරණයකට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $y = x - \frac{1}{x}$.

ඒ නයින්, ඉහත දක්වා ඇති x හි සමීකරණයට තාත්වික මූල තිබීම සඳහා p, q, r මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතාවක් සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

සෘණ නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ප්‍රතිඵලය අපෝහනය කරන්න.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ සැලැකීමෙන්, n ඔත්තේ විට

$$\sin n\theta = {}^nC_1 \sin\theta \cos^{n-1}\theta - {}^nC_3 \sin^3\theta \cos^{n-3}\theta + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\theta$$

බව පෙන්වන්න.

n ඉරට්ටේ විට, $\sin n\theta$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනය සොයන්න.

$\sin\theta \neq 0$ නම්,

$$\frac{\sin 4\theta - \sin 3\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල

$$2\cos\frac{\pi}{7},\ 2\cos\frac{3\pi}{7}\ \text{සහ}\ 2\cos\frac{5\pi}{7}$$

බව පෙන්වන්න.

5. $z = x + iy,\ x > 0,\ y > 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන්ඩ් සටහනක P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. එම රූප සටහනෙහිම Q ලක්ෂ්‍යයෙන් $i\sqrt{3}\,z$ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ නම්, Q නිර්ණය කළ හැක්කේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න. තවද, පිළිවෙලින් $z + i\sqrt{3}\,z$ සහ $z - i\sqrt{3}\,z$ නිරූපණය කරන R සහ R' ලක්ෂ්‍යයන් ද සටහන් කරන්න.

z හි විස්තාරය θ වේ.

(i) R අතාත්ත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි නම් θ සොයන්න.

(ii) z^2 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය, මූල ලක්ෂ්‍යය සහ R ඒකරේඛීය නම්, $\theta = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) ආගන්ඩ් සටහන භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$\left|z + i\sqrt{3}\,z\right|^2 + \left|z - i\sqrt{3}\,z\right|^2 = 8|z|^2$$

බව පෙන්වන්න.

6. (i) ප්‍රමූලධර්ම මගින්, වරකට r බැගින් ගත්විට ද්‍රව්‍ය n වල සංයෝජන සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(ii) මතු දක්වෙන අවශ්‍යතා දෙකම සපුරාලන්නාවූ, 75 000 ට වඩා විශාල නිඛිල කොපමණ තිබේ ද?

(*a*) නිඛිලයෙහි සංඛ්‍යාංක සියල්ල ප්‍රභින්න වේ.

(*b*) 0 සහ 1 සංඛ්‍යාංක, නිඛිලයෙහි නොපවතී.

(iii) නිඛිලයක සංඛ්‍යාංක විය හැක්කේ 1 හෝ 2 පමණක් වන අතර ඒවායේ ඓක්‍යය දහය වේ. එවැනි නිඛිල කොපමණ තිබේ ද?

7. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(i) $(3x+2y)^{20}$ හි ප්‍රසාරණයේ

(a) විශාලතම සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකය ද, (b) $x=\frac{1}{3}$ සහ $y=\frac{3}{2}$ විට, විශාලතම පදය ද,

සොයන්න.

(ii) $(1+x)^n(1+x)^n \equiv (1+x)^{2n}$

සර්වසාම්‍යයෙහි දෙපැත්තේම x^r හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

$$\sum_{s=0}^{r} {}^nC_s \, {}^nC_{r-s} = {}^{2n}C_r$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{s=0}^{n} ({}^nC_s)^2$ ඓක්‍යය සොයන්න.

(iii) $(a+bx)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ

(a) x හි ඔත්තේ බලවල, (b) x හි ඉරට්ටේ බලවල

සංගුණකයන්ගේ ඓක්‍යය සොයන්න.

8. (i) (a) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - x}{\tan 3x - 2x}$

සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

බව ප්‍රමූලධර්ම මගින් සාධනය කර,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) (a) $y=\sin(\sin x)$ නම්,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$$ බව පෙන්වන්න.

(b) k යනු නියතයක් ද, $\theta \neq 0$, $\cos\theta \neq 0$ ද විට,
$x = k(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = k(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ නම්,

θ හි ශ්‍රිත ලෙස $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයන්න.

9. (i) ආදේශ කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+1}}$$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$$ ලබා ගන්න.

(iii) $$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \tan^3 x \, dx$$ අගයන්න.

10. (i) ආසන්න අනුකලනය සඳහා සිම්සන් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

(1, 2.00), (1·5, 2·60), (2, 2·97), (2·5, 3·10), (3, 3·00), (3·5, 2·67) සහ (4, 2·10), ලක්ෂ්‍ය හරහා වක්‍රයක් ඇඳ ඇත. ඉහත නීතිය භාවිත කිරීමෙන්, එම වක්‍රයත් x අක්ෂයත් $x=1, x=4$ කෝටිකත් අතර වූ ආසන්න වර්ගඵලය, දශමස්ථාන එකකට නිවැරදිව සොයන්න.

(ii) $\log y = \tan^{-1} x$ නම්

(a) $(1+x^2)\,y^{(1)} - y = 0$

(b) $(1+x^2)\,y^{(2)} + (2x-1)\,y^{(1)} = 0$

(c) $(1+x^2)\,y^{(3)} + (4x-1)\,y^{(2)} + 2\,y^{(1)} = 0$

බව පෙන්වන්න : මෙහි $y^{(r)} = \dfrac{d^r y}{dx^r}$.

ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $r \geq 2$ සඳහා,

$$(1+x^2)\,y^{(r+1)} + (2rx-1)\,y^{(r)} + r(r-1)\,y^{(r-1)} = 0$$

බව සාධනය කරන්න.

$e^{\tan^{-1} x}$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{7}{4!}x^4 + \frac{1}{4!}x^5 + \ldots$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $\dfrac{1}{(1-x)^2\;(1-2x)}$ භින්න භාග වශයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1}{(1-x)^2\;(1-2x)}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^n හි සංගුණකය සොයන්න; මෙහි $|x| < \dfrac{1}{2}$.

11. t පරාමිතිය ඇසුරෙන්,

$$\frac{dx}{dt} = 2(t^2+1)(t-1), \qquad \frac{dy}{dt} = (t-2)(t+1),$$

යන්නෙන්, xy තලයෙහි වූ C වක්‍රයක් පරාමිතික ආකාරයෙන් දෙනු ලැබේ.

වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශක ඛණ්ඩාංකාක්ෂවලට සමාන්තර වන පරිදි, C මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයන්ට අනුරූප t හි අගයන් සඳහන් කරන්න.

$-\infty$ සිට ∞ තෙක් t විචලනය වන විට, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ සහ $\dfrac{dy}{dx}$ හි ලකුණු වෙනස් වීම විදහා පාන වගුවක් සාදන්න. ඔබගේ වගුව භාවිතයෙන්, x හි ශ්‍රිතයක් ලෙස සැලකූ y හි උපරිම සහ අවම අගයනට අනුරූප t හි අගයන් සොයන්න. $(x, y) = \left(\dfrac{25}{6}, \dfrac{7}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී උපරිමය පවතී යැයි දී ඇත්නම්, වක්‍රයේ පරාමිතික සමීකරණ සොයන්න. වක්‍රයෙන් එයම කැපෙන බව පෙන්වන්න.

වැඩිවන t හි දිශාව දක්වමින්, වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. පිළිවෙලින් $y = x^3 + x^2 - x$ සහ $y = x^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන C_1 සහ C_2 වක්‍රවල දළ සටහන්, එකම රූප සටහනක අඳින්න.

C_1 සහ C_2 වක්‍රවලින් අන්තර්ගත S පෙදෙසේ වර්ගඵලය ලබා ගන්න.

$y = 1$ රේඛාව වටා, සෘජු කෝණ හතරකින් S භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන පරිභ්‍රමණ ඝනයේ පරිමාව $\dfrac{2}{3}\pi$ බව පෙන්වන්න.