13672

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05 S I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) S සර්වත්‍ර කුලකයෙහි A සහ B උපකුලක ලෙස ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයේ නියම ප්‍රකාශ කරමින්

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

බව සාධනය කරන්න.

$f(n) = (n-1)(n-2) + 2$ මගින් $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ අර්ථ දක්වේ යැයිද, $X \subseteq \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ යැයිද ගනිමු. $A = \{1, 3, 5\}$ සහ $B = \{2, 4, 5\}$ නම් $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ සහ $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $g : A \to B$ සහ $h : B \to A$, එක් එක් $b \in B$ සඳහා $(g \circ h)(b) = b$ වන පරිදි ගනිමු.
h එකට එක බව ද, g මතට බව ද පෙන්වන්න.
$A = \mathbb{R}$ ද, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ද ලෙස ගනිමු. $g_0 : A \to B$ සහ $h_0 : B \to A$ පිළිවෙළින් $g_0(a) = a^2$ සහ $h_0(b) = \sqrt{b}$ මගින් අර්ථ දක්වේ නම්,
එක් එක් $b \in B$ සඳහා $(g_0 \circ h_0)(b) = b$ බව පෙන්වන්න.
එක් එක් $a \in A$ සඳහා $(h_0 \circ g_0)(a) = a$ සත්‍ය වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න.
ප්‍රභින්න p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)(q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද, $x + y + z = 0$ ද නම් $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $z = p - q$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $n\,(>1)$ යනු දී ඇති නිඛිලයක් ද $t > 0$ ද ලෙස ගනිමු. t විචලනය වන විට $(n+1)t + \dfrac{n-1}{t}$ හි අඩුතම අගය වන l සොයන්න.
$k > l$ විට $(n+1)t + \dfrac{n-1}{t} = k$ සමීකරණයෙහි මූල දෙකම ධන බව පෙන්වන්න.
$(n+1)t + \dfrac{n-1}{t} = \sqrt{8n(n+1)}$ හි වඩා විශාල මූලය n ඇසුරෙන් සොයන්න.

3. (අ) (i) $\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{x}{x-2}$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.
(ii) එකම රූප සටහනක $y = 3 - |x + 2|$ සහ $y = |2x - 3x^2 + x^3|$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න.
$3 - |x + 2| \geq y \geq |2x - 3x^2 + x^3|$ අසමානතාවයන් තෘප්ත වන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

(ආ) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $x^2 + 2x + 3 > 0$ බව පෙන්වීමට "විසංවාදයක් මගින් සාධනය" භාවිත කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. (අ) 3528 හි ධන භාජක සංඛ්‍යාව සොයන්න. (සටහන : $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$)

(ආ) විද්‍යා සමුළුවකට විශ්ව විද්‍යාල 20 ක් සහභාගි වන අතර එක් එක් විශ්ව විද්‍යාලය උද්භිද විද්‍යාඥයෙකු, රසායන විද්‍යාඥයෙකු, ගණිතඥයෙකු, භෞතික විද්‍යාඥයෙකු සහ සත්ත්ව විද්‍යාඥයෙකු අනුග්‍රහ කරයි. සාමාජිකයින් 10 කින් සමන්විත එක් එක් කමිටුව තුළ

(i) එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්

(ii) එක් එක් සාමාජිකයා වෙනස් විශ්ව විද්‍යාලයක් නියෝජනය කරන පරිදි එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්

(iii) ඕනෑම විශ්ව විද්‍යාල තුනකින් පුද්ගලයින් තිදෙනෙකු බැගින් ද ඕනෑම තවත් විශ්ව විද්‍යාලයකින් එක් පුද්ගලයෙකු ද බැගින්

සිටින පරිදි කමිටුවක් සැදිය හැකි ආකාර කොපමණ ද?

[(ආ) කොටසේ පිළිතුරු සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.]

5. (අ) n සහ k යනු $n \geq k$ වන පරිදි වූ ධන නිඛිල ලෙස ගනිමු.

සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) ${}^{n+1}C_k = {}^{n}C_k + {}^{n}C_{k-1}$,

(ii) $n > 1$ සඳහා $\sum_{r=k+1}^{n} {}^{r}C_k = {}^{n+1}C_{k+1} - 1$

බව පෙන්වන්න.

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ සහ } \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $(2+\sqrt{2x}+x)^2(2+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි x^r හි සංගුණකය සොයන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වන අතර r යනු $n+3$ ට වඩා අඩු සෘණ නොවන නිඛිලයකි.

x^3 හි සංගුණකය $\frac{2^{n-2}}{3}(n^3+6n^2-n)$ බව පෙන්වන්න.

6. (අ) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{2r+3}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$ සහ $f(r) = \frac{k}{r^2(r+1)^2(r+2)^2}$ ලෙස ගනිමු; මෙහි k යනු නියතයකි.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

(i) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $g(r)$ ද, $U_r = g(r) - g(r+1)$ තෘප්ත කරයි නම්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $g(r) = f(r) + c$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු නියතයකි.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $x_1 = 1, x_2 = 2$ සහ $n = 3, 4, \cdots$ සඳහා $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ ලෙස ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ බව සාධනය කරන්න.

7. (අ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{5}}{\sqrt{20 + \sin^2 x} - \sqrt{20}}$ අගයන්න.

(ආ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දැක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \text{ නම්} \\ 1998, & x = 1 \text{ නම්} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

එක් එක් $a \in \mathbb{R}$ හි දී $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ වන පරිදි $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ සහ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ වෙනස් ශ්‍රිත දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ඇ) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දැක්වේ :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{5}(x-1)(x-2)(x-37), & 1 \leq x \leq 7 \text{ හෝ } 37 \leq x \text{ නම්} \\ 54x - c, & x < 1 \text{ හෝ } 7 < x < 37 \text{ නම්} \end{cases}$$

37 හි දී g සන්තතික වන පරිදි c සොයන්න. මෙම c හි අගය සඳහා 7 හි දී g සන්තතික බවත් 1 හි දී සන්තතික නොවන බවත් පෙන්වන්න.

8. (අ) f යනු $\mathbb{R}$ හි එක් එක් x හි දී $(f(x))^3 - x(f(x))^2 - x^2 f(x) - 2x^3 - 7x^4 + 7x^5 = 0$ අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන $\mathbb{R}$ මත අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු.

ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $f'(0) = 2$ බව පෙන්වන්න. $f'(1)$ අගයන්න.

(ආ) $x > 1$ සඳහා $y = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^x$ නම්, $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ඇ) $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1} x - 9$ නම් $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}$ ලෙස ගනිමු.

(i) x හි කිසිම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $-7 - 4\sqrt{3}$ සහ $-7 + 4\sqrt{3}$ අතර $f(x)$ නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

(ii) $A + \dfrac{B}{x-4} + \dfrac{C}{x-3}$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි A, B සහ C නියත වේ.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ f හි උපරිම සහ අවම සොයන්න.

(iii) f හි සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ සොයන්න.

(iv) f හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

(ආ) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව පෙන්වා ඒ නයින් $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

11. (අ) නිව්ටන්-රැප්සන් පුනඃකරණ සූත්‍රය ප්‍රකාශ කරන්න.

$x>0$ වන $f(x) = x - \dfrac{5}{x}$ ට 1 සහ 3 අතර මූලයක් ඇති බව පෙන්වන්න.

පුනඃකරණ සූත්‍රයෙහි මූලයට ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x_0 = 2$ ලෙස ගනිමින් පුනඃකරණ සූත්‍රයෙහි n වෙනි සන්නිකර්ෂණය වන x_n, සෑම n සඳහා ම $0 < x_n \le \sqrt{5}$ සහ $x_{n+1} \ge x_n$ අසමානතා තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ පවතින බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සීමාව $f(x)=0$ හි අවශ්‍ය මූලය බව සාධනය කරන්න.

(ආ) $x > -1$ සඳහා $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ නම්,

$r = 1, 2, \cdots$ සඳහා $\dfrac{d^r g(x)}{dx^r} = \dfrac{(-1)^r r!}{(x+1)^{r+1}}$ බව ගණිතමය අභ්‍යුහනයෙන් පෙන්වන්න.

$g(x)$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ බව අපෝහනය කරන්න.

12. (අ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) $\dfrac{dy}{dx} = v$ ආදේශය භාවිතයෙන් $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ යන දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය,

$2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ යන පළමුවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

ඒ නයින්, දී ඇති දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) ශීර්ෂ, මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි ද, x-අක්ෂය, පොදු අක්ෂය ලෙස ද ඇති පරාවල කුලයෙහි ප්‍රලම්බ පරාවලු සොයන්න.