සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

17863

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හතකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B, C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයේ උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ උපයෝගී කර ගන්නා වූ කුලක වීජයේ නියම සඳහන් කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) (i) එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ට බහු අගයයන් ගැනීමට පුළුවන් බව ද

(ii) එක් එක් $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ සඳහා $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leq |x_1 - x_2|$ බව ද

දී ඇත. එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ඇත්තෙන් ම ගන්නේ එක් අගයක් පමණක් බව සාධනය කරන්න. f ශ්‍රිතයක් ද?

(ඇ) $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ ශ්‍රිතය,

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ යැයි ගනිමු. g එකට එක සහ මතට බව පෙන්වන්න.

එකට එක සහ මතට වූ $h : (0, c) \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතයක් පවතී ද? මෙහි $c = 10^{-1999}$ වේ. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x\left(y^4 - z^4\right) + y\left(z^4 - x^4\right) + z\left(x^4 - y^4\right)$ හි සාධක සොයන්න.

(ආ) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ සහ $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ යැයි ගනිමු.

$f(x) + \lambda g(x)$ ශ්‍රිතය $a(x + b)^2$ ආකාරයට වන සේ වූ λ හි අගයයන් සොයන්න ; මෙහි a සහ b තාත්ත්වික නියත වේ.
ඒ නයින්, A, B, c හි අගයයන් දෙමින් $A(x - 3)^2 + B(x + c)^2$ ආකාරයට $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$g(x) = 10A(x - 3)^2 + 5B(x + c)^2$ බව ද පෙන්වන්න.

තව ද, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ හි කුඩාතම සහ වැඩිතම අගයයන් ද සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| > 4$ අසමානතාව විසඳන්න.

(ආ) $(1+t)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

(i) ${}^nC_k + 2\,{}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2} = {}^xC_k$ නම්, x සොයන්න.

(ii) ${}^nC_i\,{}^iC_j = {}^nC_j\,{}^{n-j}C_{i-j}$ බව පෙන්වන්න.

$n > 10$ සඳහා, $$\sum_{i=10}^{n} (-1)^i\,{}^nC_i\,{}^iC_{10} = 0$$

බව අපෝහනය කරන්න.

[මෙහි ${}^nC_r$ යන්න සුපුරුදු අර්ථය ගනී.]

4. සිරස් කුඹගසක ධජ අටක් ප්‍රදර්ශනය කිරීමෙන් "8 - ධජ සංඥවක්" සෑදේ. කුඹගස මත ධජ අට සකස් කළ පටිපාටිය මගින් සංඥවක් නිර්ණය වේ.

(i) සියල්ල ම වෙනස් ධජ අටක් මගින්

(ii) සියල්ල ම වෙනස් ධජ නවයක් මගින්

(iii) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ දෙකක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මගින්

(iv) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ තුනක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මගින්

එකිනෙකට වෙනස් "8 - ධජ සංඥ" කොපමණ සෑදිය හැකි ද?

5. (අ) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා,

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)^2(r+2) = \frac{1}{10}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක U_r නම් r වැනි පදය

$$\frac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$$ වෙයි.

ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා, $U_r = A\{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි වූ, A නියතයක් සහ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ඉහත ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.

ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. (අ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left\{ \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}} \right\}$

අගයන්න.

$\frac{\pi}{2}$ කරා x එළැඹෙන විට ඉහත ශ්‍රිතයේ සීමාව පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ආ) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x^3}{|x^2-1|}, & x \neq -1, 1 \text{ විට} \\ 1, & \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ.

$x = 0$ දී හා $x = 1$ දී f සන්තතික දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) $\{(x, f_1(x)) : |x| \leq 2\} \cup \{(x, f_2(x)) : |x| \leq 2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4,\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$ වන සේ,

$\{x : x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 2\}$ ප්‍රාන්තරයෙහි සන්තතික වූ f_1 සහ f_2 ශ්‍රිත දෙකක් ලියන්න.

7. (අ) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ නම්, $x = 1$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ආ) $y = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$ නම්,

$\left(1+x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \text{ විට} \\ 2x^2 + 3x, & x \leq 0 \text{ විට} \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වෙන, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x = 0$ දී අවකල්‍ය නොවන බව ද, එනමුත් $g(x) = xf(x)$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වෙන $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x = 0$ දී අවකල්‍ය බව ද පෙන්වන්න.

8. $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ යැයි ගනිමු.

$y = f(x)$ ප්‍රස්තාරය මගින් ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද ගෙනහැර දක්වමින් ඉහත ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් අඳින්න.

තව ද, (i) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද
(ii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා ඇත්නම්) ඛණ්ඩාංක ද
(iii) ස්පර්ශෝන්මුඛ ද

ගෙන හැර දක්වමින්, $y = \frac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් ද අඳින්න.

9. $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$ සොයන්න. (**ඉඟිය** : $t=\tan\frac{x}{2}$ යොදා බලන්න.)

$\frac{\cos^2 x}{2+\sin x} \equiv A + B\sin x + \frac{C}{2+\sin x}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණය කර

ඒ නයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\,dx$ අගයන්න.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ \ln(2+\sin x)\,dx = \ln 2 + \pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

10. (අ) $V=\frac{y}{x}$ ආදේශය භාවිත කිරීමෙන්,

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x\left\{3+2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) xy-තලයෙහි පිහිටි C වක්‍රයට $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී y අක්ෂය හමුවේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $y=1$ රේඛාව මත පිහිටයි. $y=\lambda x^2+1$ න් ගෙන දෙන පරාවල කුලයට C අයත් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.

තව ද, ඉහත වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර ද සොයන්න.