සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

17738

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හතකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. $x=a,\ x+y=b$ සහ $-x+y+z=c$ සමීකරණ $AX=B$ ආකාරයට ලියූ විට ලැබෙන A න්‍යාසය සොයන්න;

මෙහි $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ වේ.

x, y, z සඳහා a, b, c ඇසුරෙන් දී ඇති සමීකරණ විසඳීමෙන්, A^{-1} න්‍යාසය ලියන්න.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ නම්, CC^T සොයන්න.

ඒ නයින්, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ විට, $AC^T X = D$ සමීකරණය විසඳන්න.

$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ නම්, $AC^T X = D$ සමීකරණයට අනන්‍ය විසඳුමක් තිබේ ද?

ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x=0$ යන්න,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & x-1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 4 & x-4 & 2x-4 \end{vmatrix} = 0$$

සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.
තව ද, ඉහත සමීකරණයේ ඉතිරි විසඳුම් සියල්ල ද සොයන්න.

(ආ) $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$f(x) = r\cos(nx-\theta) + s$ ආකාරයට $f(x)$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් ද, r ධන සංඛ්‍යාවක් ද, θ, s තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද වන අතර $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ වේ.

f හි උපරිම සහ අවම අගයයන් ද ඒවා සිදුවන විට අනුරූප x හි අගයයන් ද අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා, $\theta \neq (4n+3)\frac{\pi}{2}$ විට,

$$\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$$

බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ,

(i) $\left(1 + \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 + i\left(1 + \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 = 0$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $\left(\frac{\sqrt{2} + 1 + i}{\sqrt{2} + 1 - i}\right)^{1/4}$ හි සියලු ම අගයයන් $\cos\theta + i\sin\theta$ ආකාරයට ලබා ගන්න.

[මෙහි, $a^{\frac{1}{4}}$ යන්නෙන් අදහස් කෙරෙනුයේ $z^4 = a$ හි විසඳුමකි.]

4. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය ද, w යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් ද යැයි ගනිමු. O වටා ϕ කෝණයකින් වාමාවර්ත අතට OP භ්‍රමණය කළ විට P හි නව පිහිටීම P' යැයි ගනිමු ; මෙහි $\phi = \operatorname{Arg} w$ වේ. Q යනු, $OQ = |w|\, OP'$ වන පරිදි OP' මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම් Q මගින් zw සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

$|z - a| = a$ වක්‍රය, මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව ද එහි කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න ; මෙහි a යනු ධන නියතයකි.

$|z - a| = a$ විට,

(i) $z \neq 0$ සඳහා, $z - 2a = i\, z \tan\theta$ බව ද,

(ii) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z - 2a}\right)$, z හි අගය මත රඳ නොපවතින බව ද

පෙන්වන්න ; මෙහි $\theta = \operatorname{Arg} z$ වේ.

5. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ සහ $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ද ABC තලයට ලම්බ වූ ඒකක දෛශිකයක් ද සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ O, A, B, C ලක්ෂ්‍ය ඒකතල නොවන බව පෙන්වන්න.

H යනු, O සිට ABC තලයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OH}$ ද $BD : DC$ අනුපාතය ද සොයන්න ; මෙහි D යනු AH සහ BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යි.

6. (අ) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) $\cos 3\theta \equiv \cos\theta\ (2\cos 2\theta - 1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \frac{2\pi}{41}$ විට,

$$(2\cos 11\alpha - 1)(2\cos 17\alpha - 1)(2\cos 31\alpha - 1)(2\cos 33\alpha - 1) = 1$$

බව පෙන්වන්න.

7. H යනු, AC ට BH ලම්බ වන පරිදි ද, AB ට CH ලම්බ වන පරිදි ද ABC තලයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යය යි. ABC තලයෙහි වූ සෘජු කෝණාස්‍රාකාර කාටීසියානු අක්ෂ කුලකයකට අනුබද්ධ ව, $A \equiv (\alpha, \beta)$ වේ; මෙහි $|\alpha| \neq 1$, $\beta \neq 0$ සහ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$ වේ. BH සහ CH රේඛාවල සමීකරණ පිළිවෙළින්

$(\alpha - 1)x + \beta y + \alpha - 1 = 0$ සහ $(\alpha + 1)x + \beta y - (\alpha + 1) = 0$ වෙයි.

B සහ C හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කර AH සහ BC ලම්බ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් ශීර්ෂය හරහා, සම්මුඛ පාදයට සමාන්තර රේඛාවක් ඇඳිනු ලැබේ. මෙම රේඛා තුනෙන් $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණය සෑදේ. H ලක්ෂ්‍යය, A', B' සහ C' ලක්ෂ්‍යවලින් සමදුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

8. $P(\cos\theta, \sin\theta)$ යනු $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි. Q යනු P හරහා වූ විෂ්කම්භයේ අනෙක් අන්තය යි. A සහ B යනු පිළිවෙළින් $(1, 0)$ සහ $(0, 1)$ ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍ය වේ. AP සහ BQ රේඛා U හි දී ඡේදනය වේ නම්, U හි ඛණ්ඩාංක,

$$(x - 1)\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

සහ $$(1 + x - y)\cos\frac{\theta}{2} + (x + y - 1)\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

සමීකරණ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

U ලක්ෂ්‍යය, S අචල වෘත්තයක් මත පිහිටන බව අපෝහනය කර එහි සමීකරණය ලබාගන්න.

තව ද, AQ සහ BP හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ද S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

9. අරය a වූ ද කේන්ද්‍රයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (a, α) වූ ද වෘත්තයක ධ්‍රැවක සමීකරණය සොයන්න.

අරයයන් පිළිවෙළින් 3 සහ 4 වූ S_1, S_2 වෘත්ත දෙකක් O සහ O' හි දී ප්‍රලම්භ ව ඡේදනය වේ. S_1 හි කේන්ද්‍රය O ට යා කෙරෙන රේඛාවත් OO' රේඛාවත් අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

OO' ආරම්භක රේඛාව ලෙස ද O ධ්‍රැවය ලෙස ද ගෙන S_1 සහ S_2 හි ධ්‍රැවක සමීකරණ ලියන්න.

O හරහා වූ විචල්‍ය රේඛාවක්, පිළිවෙළින් P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී S_1 සහ S_2 නැවත ඡේදනය කරයි. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය අචල වෘත්තයක් මත පිහිටන බව පෙන්වා, එහි කේන්ද්‍රයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

10. PQ යනු, ශීර්ෂය O වූ $y^2 = 4ax$ පරාවලයේ විචල්‍ය ජ්‍යායක් යැයි ගනිමු. $P\hat{O}Q$ කෝණය සෘජු කෝණයක් වන පරිදි වූ සියලු PQ ජ්‍යායයන් ඒකලක්ෂ්‍ය බව සාධනය කරන්න.

ඉහත පරාවලයට එය මත පිහිටි R විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය, $xy = 1$ බහුවලය S සහ T හි දී ඡේදනය කරනු ලැබේ. ST හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය අචල පරාවලයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.