



NEW

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்தகணிதம்- II

புதிய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சைக்காரர்களின் உபயோகத்துக்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சைக்காரர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளும் கருத்துக்களுக்கிணங்க, இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாறலாம்.



க.பொ.த(உ.த) பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்த கணிதம் II

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

புதிய பாடத்திட்டம்

பத்திரம் I

$$\text{பகுதி : A} = 10 \times 25 = 250$$

$$\text{பகுதி : B} = 05 \times 150 = 750$$

$$\text{மொத்தம்} = 1000 / 10$$

$$\text{பத்திரம் I இறுதிப் புள்ளி} = 100$$

பகுதி A

1. ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B, C என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் அதே வரிசையில் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரு நேர்கோட்டில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை B உடன் நேரடியாக மோதுமாறு துணிக்கை A இற்கு வேகம் u தரப்படுகிறது. துணிக்கை A உடன் மோதிய பின்னர் துணிக்கை B இயங்கித் துணிக்கை C உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். முதலாம் மோதுகைக்குப் பின்னர் B இன் வேகத்தைக் காண்க.
 B இற்கும் C இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகமும் e ஆகும். B உடன் மோதிய பின்னர் C இன் வேகத்தைக் காண்க.

$I = \Delta(mv)$, இனை பிரயோகிக்க

A, B இற்கு (1^{வது} மொத்தல்)

$$0 = mv + mw - mu \quad (5)$$

$$\Rightarrow v + w = u \quad (i)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி :

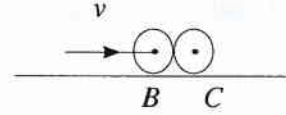
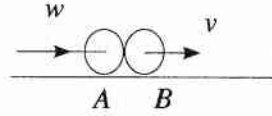
$$v - w = eu \quad (ii) \quad (5)$$

$$\therefore (i) + (ii) \Rightarrow v = \frac{(1+e)}{2} u \quad (5)$$

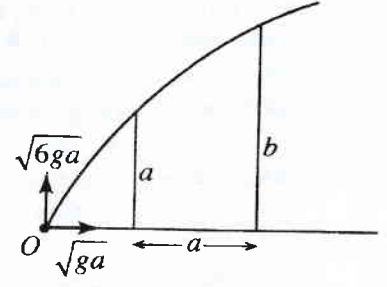
$$1^{\text{வது}} \text{ மொத்தலின் பின் } B \text{ இன் வேகம்} = \frac{1}{2}(1+e)u.$$

$$u \text{ ஐ } v \text{ ஆல் பிரதியிட, } C \text{ இன் வேகம்} = \frac{1}{2}(1+e)v \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4}(1+e)^2 u \quad (5)$$



2. கிடைக் கூறும் நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே \sqrt{ga} , $\sqrt{6ga}$ ஆகவுள்ள ஒரு வேகத்துடன் கிடை நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒன்றிலிருந்தொன்று கிடைத் தூரம் a இல் இருக்கும் a , b ஆகிய உயரங்கள் உள்ள இரு நிலைக்குத்துச் சுவர்களுக்கு மட்டுமட்டாக மேலாகத் துணிக்கை செல்கின்றது. உயரம் a ஐ உடைய சுவரைக் கடந்து செல்லும்போது துணிக்கையின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு $2\sqrt{ga}$ எனக் காட்டுக.



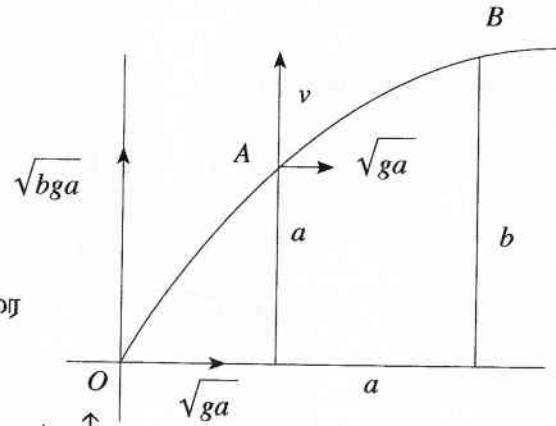
$$b = \frac{5a}{2} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

துணிக்கை a உயர சுவரை கிடைவேகம் v உடன் கடக்கிறது என்க

O இலிருந்து A க்கு $\uparrow v^2 = u^2 + 2as$:

$$v^2 = 6ga - 2g \cdot a = 4ga \quad (5)$$

$$\therefore v = 2\sqrt{ga} \quad (5)$$



நேரம் T க்கு பின் அது இரண்டாவது சுவரை கடக்கும் எனின்

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ } A \text{ இனை இலிருந்து } B \text{ க்கு, } \rightarrow, \uparrow,$$

ஆக பிரயோகிக்க

$$a = \sqrt{ga} \cdot T, \quad (5)$$

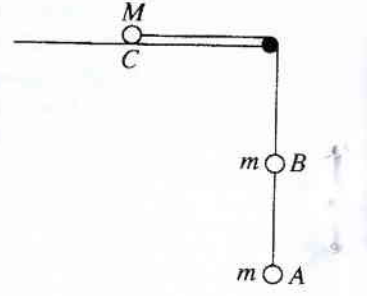
$$\therefore b - a = 2\sqrt{ga} \cdot T - \frac{1}{2}gT^2 \quad (5)$$

$$T \text{ ஐ நீக்க: } b - a = 2\sqrt{ga} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{a}{g}$$

$$\therefore b = a + 2a - \frac{a}{2}$$

$$\text{i.e. } b = \frac{5a}{2} \quad (5)$$

3. உருவில் A, B, C ஆகியன முறையே m, m, M திணிவுகள் உள்ள துணிக்கைகளாகும். A, B ஆகிய துணிக்கைகள் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது உள்ள துணிக்கை C ஆனது மேசையின் விளிம்பில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் ஒப்பமான சிறிய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் வேறோர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லாத் துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத்தக்கதாகத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. A ஐயும் B ஐயும் தொடுக்கும் இழையின் இழுவையைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.



$F = ma$ ஐ பிரயோகிக்க

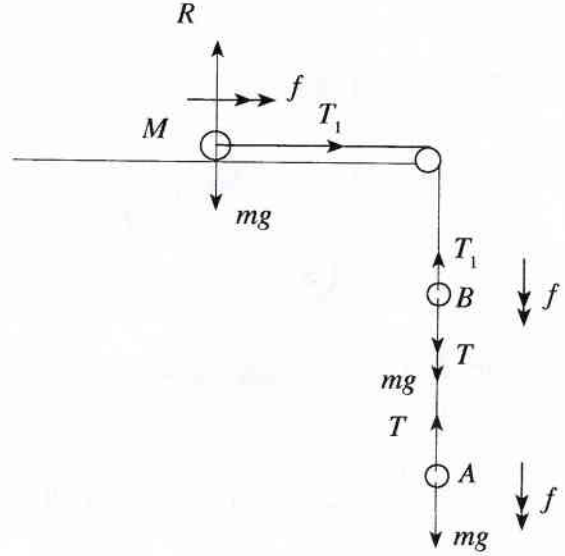
$$A, \text{ க்கு } \downarrow \quad mg - T = mf \quad (5)$$

$$B, \text{ க்கு } \downarrow \quad T + mg - T_1 = mf, \quad (5)$$

$$C, \text{ க்கு } \rightarrow \quad T_1 = Mf \quad (5)$$

விசைகள் (5)

ஆர்முடுகல்கள் (5)



25

4. திணிவு $M \text{ kg}$ ஐயும் மாறா வலு $P \text{ kW}$ ஐயும் கொண்ட ஒரு கார் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு நேர் வீதி வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை $R (> Mg \sin \alpha) \text{ N}$ உள்ளது. ஒரு குறித்த கணத்தில் காரின் ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ ஆகும். இக்கணத்தில் காரின் வேகத்தைக் காண்க. வீதி வழியே கார் கீழ்நோக்கி இயங்கத்தக்க மாறாக் கதி $\frac{1000 P}{R - Mg \sin \alpha} \text{ m s}^{-1}$ என உய்த்தறிக.

காரின் கதி $v \text{ m s}^{-1}$ ஆக

$$\text{உணற்று விசை } F = \frac{1000 P}{v} \quad (5)$$

ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ ஆக இருக்கும் போது

$F = ma$: இனை பிரயோகிக்க

$$\checkmark F + Mg \sin \alpha - R = Ma. \quad (10)$$

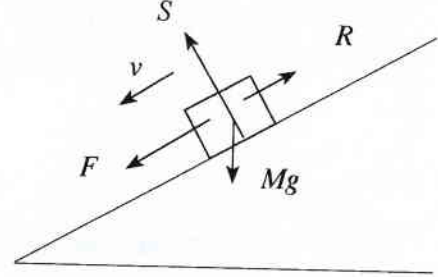
$$\Rightarrow \frac{1000 P}{v} + Mg \sin \alpha - R = Ma$$

$$\therefore v = \frac{1000 P}{R - Mg \sin \alpha + Ma} \quad (5)$$

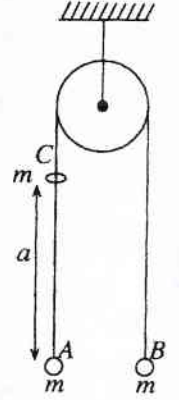
கார் மாறாத் கதியுடன் நகரும் போது

$a = 0$ மாறாத் கதியின் பெறுமானம்

$$v = \frac{1000 P}{R - Mg \sin \alpha} \quad (5)$$



5. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டு நாப்பத்தில் தொங்குகின்றன. A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் அதே திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய மணி C புவியீர்ப்பின் கீழ்ச் சுயாதீனமாக இயங்கி A உடன் மோதி இணைகின்றது (உருவைப் பார்க்க). A இற்கும் C இற்குமிடையே மோதுகை நடைபெறும் கணத்தில் இழையின் கணத்தாக்கையும் மேற்குறித்த மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் B பெறும் வேகத்தையும் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.



$$v^2 = u^2 + 2as \downarrow, \text{இனை பிரயோகிக்க}$$

a தூரம் விழுந்தபின் c இன் கதி

$$u = \sqrt{2ga} \quad (5)$$

C, A இன் மொத்தல் கணத்தில் இழையின் கணத்தாக்கு J என்க

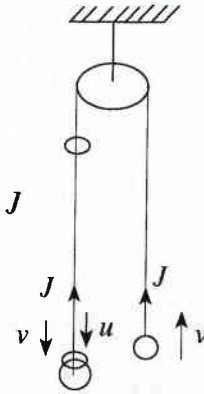
மொத்தலின் பின் B இன் கதி v என்க

$$I = \Delta(mv) \text{ இனை பிரயோகிக்க}$$

$$B \text{ க்கு } \uparrow J = mv. \quad (5)$$

$$A, C \text{ க்கு } \downarrow -J = (m + m)v - mu. \quad (10)$$

$$\text{i.e. } -J = 2mv - m\sqrt{2ga}.$$



$$(5) \text{ for } v.$$

6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம். $\hat{AOC} = \hat{AOD} = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ ஆகவும் இருக்குமாறு C, D ஆகிய இரு வேறுவேறான புள்ளிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

அவதானிக்க

$$\vec{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\vec{OB} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$= -(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} \quad (5)$$

$$\therefore AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\vec{OC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ என்க}$$

$$\vec{OA} \perp \vec{OC}, \text{ எனவே } (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 0$$

$$\therefore y = -2x \quad (5)$$

$$OC = \frac{1}{3}AB, \text{ எனவே } \sqrt{x^2 + 4x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \quad (5)$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{9}.$$

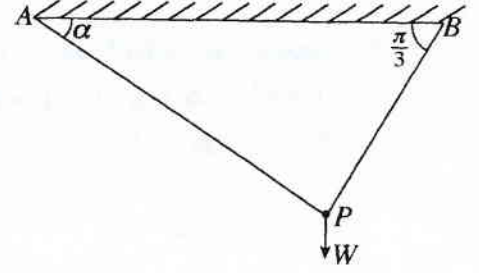
இச் சமன்பாடுகள் D இன் ஆள் கூறுகளுக்கும் உண்மையானவை

$$\text{எனவே } x = \pm \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} (5) \quad \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array} \right\} (5)$$

ஆகவே காவிகள் C, D என்பன $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$, $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$ ஆகும்.

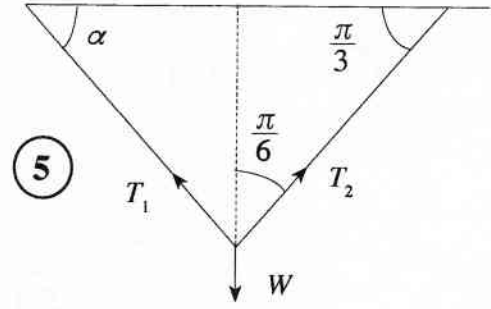
7. கிடையுடன் முறையே α , $\frac{\pi}{3}$ ஆகிய கோணங்களை ஆக்கும் AP , BP என்னும் இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் ஒரு கிடைச் சீலிங்கிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. இழை AP இல் உள்ள இழுவையை T_1 , α ஆகியவற்றிற் காண்க.
இதிலிருந்து, இவ்விழுவையின் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் அதனை ஒத்த α இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.



இலாமியின் தேற்றப்படி

$$\frac{T_1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{W}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{6} \right)} \quad (10)$$

$$\therefore T_1 = \frac{W}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)} \quad (5)$$



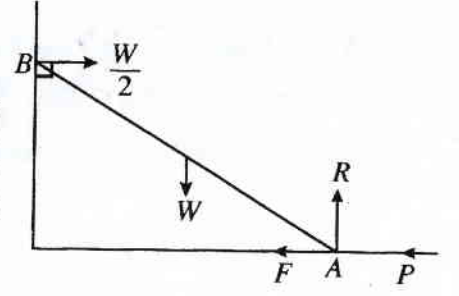
AP இல் இழுவை T_1 இன் இழிவு $= \frac{W}{2}$,

T_1 இன் இழிவுக்குரிய $\alpha = \frac{\pi}{6}$

(5)

25

8. நீளம் $2a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீதும் முனை B ஓர் ஓப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவருக்குச் செங்குத்தாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கோல் நாப்பத்தில், முனை A இல் சுவரை நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் பேணப்படுகின்றது. உருவில் F உம் R உம் முறையே A இல் உள்ள உராய்வு விசையையும் செவ்வன் மறுத்தாக்கத்தையும் குறிக்கின்றன. B இல் சுவரின் மூலம் உண்டாக்கப்படும் மறுதாக்கம் உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $\frac{W}{2}$ அத்துடன் கோலிற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ எனின், $\frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ எனக் காட்டுக.



கோலின் சமநிலைக்கு

$$\uparrow R - W = 0. \quad (5)$$

$$\leftarrow P + F - \frac{W}{2} = 0. \quad (5)$$

$$\therefore F = \frac{W}{2} - P \quad (5)$$

$$\therefore |F| \leq \mu R,$$

$$(5)$$

எனவே

$$\left| \frac{W}{2} - P \right| \leq \frac{1}{4} W$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} W \leq \frac{W}{2} - P \leq \frac{1}{4} W$$

$$\Rightarrow -\frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4} \quad (5)$$

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு நிகழ்ச்சிகளாகக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{10}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $P(B)$, $P(A' \cap B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A', B' ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன.

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (A' \cap B)) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} .$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2} . \quad (5)$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)')$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad (5)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \quad (5)$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right]$$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A' \cap B') = \frac{3}{10} \quad (5)$$

25

10. ஒவ்வொன்றும் 5 இலும் குறைந்த ஐந்து நேர் நிறையெண்களுக்கு இரு ஆகாரங்கள் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றில் ஒன்று 3 ஆகும். அவற்றின் இடை, இடையம் ஆகிய இரண்டும் 3 இற்குச் சமம். இவ்வைந்து நிறையெண்களையும் காண்க.

இடையம் 3 ஐயும் இரு வேறு வேறான ஆகாரங்களை கொண்ட ஐந்தை விட குறைவான ஐந்து எண்கள் பின்வரும் இரு வழிகளில் ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்படலாம்

$$a, a, 3, 3, 4 \quad (5)$$

$$b, 3, 3, 4, 4 \quad (5)$$

இடை 3 என்பதால் அவற்றின் கூட்டுத் தொகை 15

$$\text{எனவே } , 2a + 10 = 15 ; a = \frac{5}{2}, \# \quad (5)$$

$$\text{அல்லது } b + 14 = 15 ; b = 1. \quad (5)$$

$$\therefore \text{ ஐந்து எண்கள் } 1, 3, 3, 4, 4 \quad (5)$$

25

பகுதி B

* ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.)

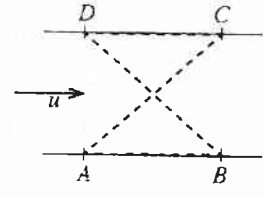
11. (a) P, Q என்னும் இரு கார்கள் ஒரு நேர் வீதி வழியே மாறா ஆர்முடுகல்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. நேரம் $t = 0$ இல் P இன் வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உம் Q இன் வேகம் $(u + 9) \text{ m s}^{-1}$ உம் ஆகும். P இன் மாறா ஆர்முடுகல் $f \text{ m s}^{-2}$ உம் Q இன் மாறா ஆர்முடுகல் $(f + \frac{1}{10}) \text{ m s}^{-2}$ உம் ஆகும்.

(i) $t \geq 0$ இற்கு P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கு ஒரே வரிப்படத்திலும்

(ii) $t \geq 0$ இற்கு P தொடர்பாக Q இன் இயக்கத்திற்கு வேறொரு வரிப்படத்திலும் வேக - நேர வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.

நேரம் $t = 0$ இல் கார் P ஆனது கார் Q இலும் பார்க்க 200 மீற்றர் முன்னால் இருக்கின்றதென மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. Q ஆனது P ஐக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

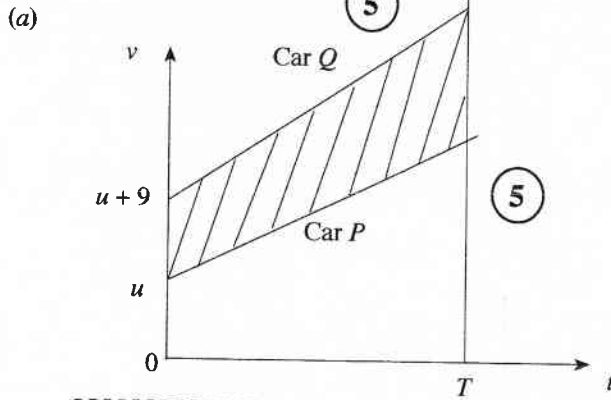
(b) சமநீரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள அகலம் a ஐ உடைய ஓர் ஆறு சீரான வேகம் u உடன் பாய்கின்றது. உருவில் கரைகளின் மீது உள்ள A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும். நீர் தொடர்பாக மாறாக் கதி $v (> u)$ உடன் இயங்கும் B_1, B_2 என்னும் இரு படகுகள் ஒரே கணத்தில் A இலிருந்து அவற்றின் பயணங்களை ஆரம்பிக்கின்றன. படகு B_1 முதலில் AC வழியே C இற்குச் சென்று பின்னர் திசை CD இல் ஆறு வழியே எதிர்ப்போக்கில் D இற்குச் செல்கின்றது. படகு B_2 முதலில் திசை AB இல் ஆறு வழியே அதன் போக்கில் B இற்குச் சென்று பின்னர் BD வழியே D இற்குச் செல்கின்றது. ஒரே உருவில் B_1 இன் A இலிருந்து C வரைக்கும் B_2 இன் B இலிருந்து D வரைக்குமான இயக்கங்களுக்கு வேக முக்கோணிகளைப் பரும்படியாக வரைக.



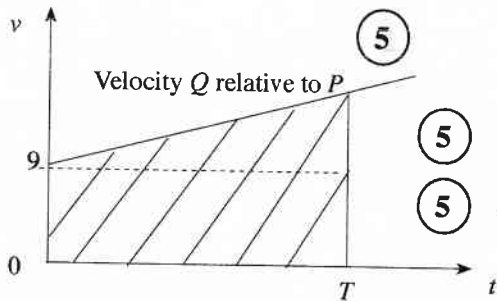
இதிலிருந்து. A இலிருந்து C இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_1 இன் கதி $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2v^2 - u^2} + u)$ எனக் காட்டி,

B இலிருந்து D இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_2 இன் கதியைக் காண்க.

B_1, B_2 ஆகிய இரு படகுகளும் ஒரே கணத்தில் D ஐ அடையுமென மேலும் காட்டுக.



10



(5) $v(Q, P) = (u + 9) - u = 9.$

(5) $a(Q, P) = (f + \frac{1}{10}) - f = \frac{1}{10}.$

15

$t = 0$, இல்கார் P, Q ஐ விட 200 m முன்னால் உள்ளது

இரு வரைபுகளிலும் நிழற்றுப்பட்ட பரப்பு = 200. (5)

Q இற்கு P ஐ முந்த எடுக்கும் நேரம் T என்க

$$\therefore \frac{1}{2} T (9 + 9 + \frac{1}{10} T) = 200 \quad (10)$$

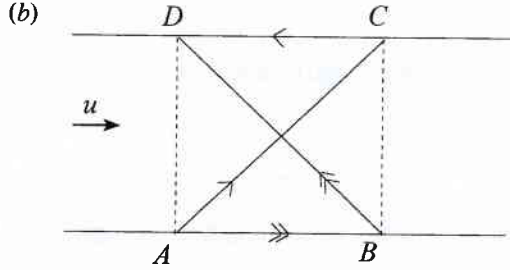
(5)

$$\Rightarrow T^2 + 180 T - 4000 = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow (T - 20)(T + 200) = 0$$

$$T > 0, \text{ ஆகவே } T = 20. \quad (5)$$

25



அவதானிக்க

$$V(B_1, E) = \angle \frac{\pi}{4}, \quad (5) \quad V(B_2, E) = \angle \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$V(W, E) = \rightarrow U, \quad (5)$$

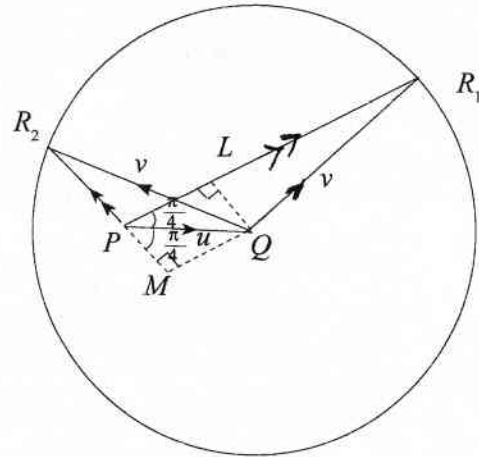
$$V(B_i, W) = v, \text{ for } i = 1, 2.$$

$$V(B_i, E) = V(B_i, W) + V(W, E) \quad (10)$$

$$= V(W, E) + V(B_i, W)$$

$$= \vec{PQ} + \vec{QR}_i, \quad i = 1, 2$$

$$= \vec{PR}_i, \quad i = 1, 2$$



(15) + (15)

55

ΔPQR_1 , இல்

$$PR_1 = PL + LR_1$$

$$= \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2v^2 - u^2} + u] \quad (10)$$

A இலிருந்து C க்கு B_1 இன் கதி $\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2v^2 - u^2} + u)$

In ΔPQR_2 , இல்

$$\begin{aligned} PR_2 = MR_2 - MP &= \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{u}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2v^2 - u^2} - u) \end{aligned} \quad (10)$$

20

\vec{AC} வழியேயும் பின்னர் \vec{CD} வழியேயும் ஆன B_1 இன் இயக்கத்துக்கான நேரம்

$$T_1 = \frac{a\sqrt{2}}{PR_1} + \frac{a}{v-u} \quad (5)$$

\vec{AB} வழியேயும் பின்னர் \vec{BD} வழியேயும் ஆன B_2 இன் இயக்கத்துக்கான நேரம்

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad (5)$$

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad (5)$$

$$T_2 - T_1 = a\sqrt{2} \left(\frac{1}{PR_2} - \frac{1}{PR_1} \right) - a \left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u} \right) \quad (5)$$

$$= a\sqrt{2} \left(\frac{PR_1 - PR_2}{PR_1 \cdot PR_2} \right) - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} u}{\frac{1}{2} [(2v^2 - u^2) - u^2]} - \frac{2au}{v^2 - u^2} \quad (5)$$

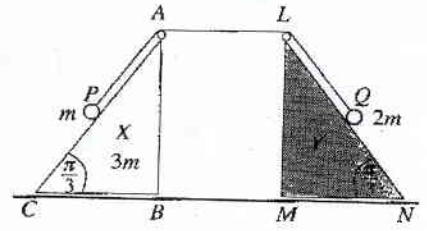
$$= \frac{2au}{v^2 - u^2} - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

$$= 0. \quad (5)$$

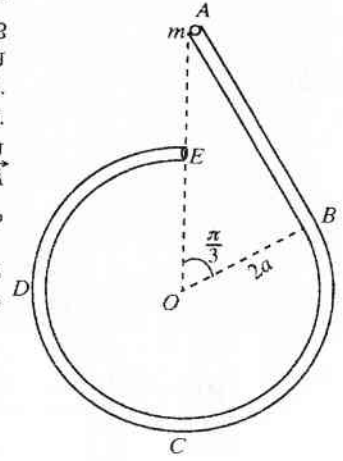
எனவே படகுகள் B_1, B_2 தங்களுடைய இலக்கு D ஐ ஒரே நேரத்தில் அடையும்

25

12. (a) உருவில் ABC, LMN ஆகிய முக்கோணிகள் $\hat{ACB} = \hat{LNM} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{ABC} = \hat{LMN} = \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள BC, MN ஆகியவற்றைக் கொண்ட முகங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள முறையே X, Y என்னும் இரு ஒப்பமான கிரான சர்வசம ஆயுட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டுகளாகும். திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஆப்பு X ஆனது நிலத்தின் மீது சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை ஆப்பு Y நிலைப்படுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. AC, LN ஆகிய கோடுகள் உரிய முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். A, L ஆகியவற்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட இரு ஒப்பமான சிறிய கப்பிகளுக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் இரு துணிகளுடன் முறையே $m, 2m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொடக்க அமைவில் இழை இறுக்கமாக இருக்க $AP = AL = LQ = a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் முறையே AC, LN ஆகியவற்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. X ஆனது Y ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தை a, g ஆகியவற்றில் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

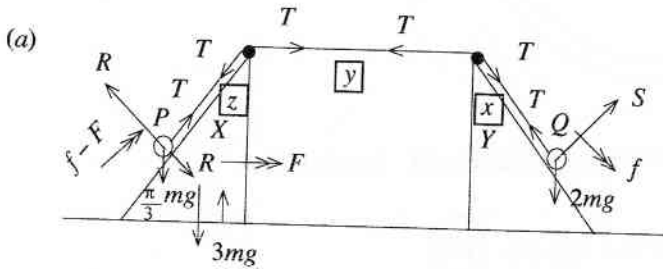


(b) உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஓர் ஒடுங்கிய ஒப்பமான குழாய் $ABCDE$ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. நீளம் $2\sqrt{3}a$ ஐ உடைய பகுதி AB நேராக இருக்கும் அதே வேளை அது B இல் ஆரை $2a$ ஐ உடைய வட்டப் பகுதி $BCDE$ இற்குத் தொடர்வாக இருக்கின்றது. A, E ஆகிய முனைகள் மையம் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ளன. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது A இல் குழாயினுள்ளே வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. \vec{OA} உடன் கோணம் θ ($\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi$) ஐ \vec{OP} ஆக்கும்போது துணிக்கை P இன் கதி v ஆனது $v^2 = 4ga(2 - \cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



துணிக்கை P இன் A இலிருந்து B இற்கான இயக்கத்தில் அதன் மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது B ஐக் கடக்கும்போது துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கம் சடுதியாக மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.



(a)

Acc of $(P, X) = f$

Acc of $(X, E) = F$

\therefore Acc of $(P, E) = F + f$

Acc of $(Q, E) = \frac{f}{\sin(\frac{\pi}{3})}$, ($\because Y$ is fixed.)

$F = ma$ இனை பிரயோகிக்க

X துணிக்கை P இன் இயக்கத்துக்கு;

$\rightarrow T = 3mF + m(F + \frac{f}{2})$ (15)

விசைகள் (15)

ஆர்முடுகல்கள் (20)

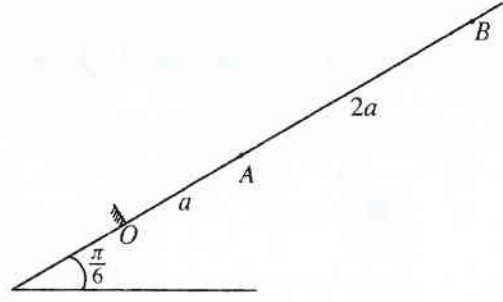
$x + y + z = \text{மாறிலி}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$

$\Rightarrow -\ddot{z} = \ddot{x} - (-\ddot{y})$

$= f - F$

13. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ இற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த தளத்தின் ஓர் அதியுபர் சரிவுக் கோட்டின் மீது O ஆனது ஆகவும் கீழே உள்ள புள்ளியாக இருக்க O , A, B ஆகிய புள்ளிகள் அதே வரிசையில் $OA = a$ ஆகவும் $AB = 2a$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ளன. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது புள்ளி B ஐ அடையும் வரைக்கும் இழை கோடு OAB வழியே இழுக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் துணிக்கை P ஓய்விருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. B இலிருந்து A வரைக்கும் P இன் இயக்கச் சமன்பாடானது $0 \leq x \leq 2a$ இற்கு $\ddot{x} + \frac{g}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $AP = x$ ஆகும்.



$y = x + \frac{a}{2}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த இயக்கச் சமன்பாட்டினை $\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}$ இற்கு வடிவம் $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ இல் மறுபடியும் எழுதுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

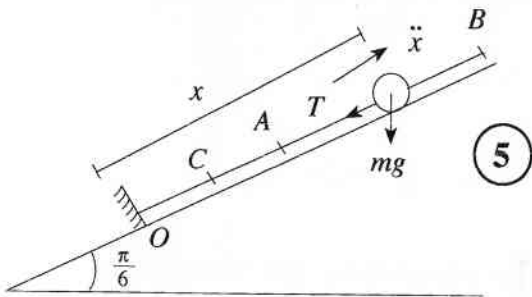
மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் கண்டு சூத்திரம் $\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் A ஐ அடையும்போது P இன் வேகத்தையும் காண்க.

O ஐ அடையும்போது P இன் வேகம் $\sqrt{7ga}$ எனக் காட்டுக.

B இலிருந்து O இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) + 2k \right\}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

துணிக்கை P ஆனது O ஐ அடையும்போது அது தளத்திற்குச் செங்குத்தாக O இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான தடுப்புடன் மோதுகின்றது. P இற்கும் தடுப்புக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும்.

$0 < e \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$ எனின், பின்னர் நிகழும் P இன் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமன்று எனக் காட்டுக.



P இன் இயக்கச் சமன்பாடு : $F = ma$;

$$T - mg \frac{1}{2} = m(-\ddot{x}) \quad \text{--- (i) } \quad \textcircled{10}$$

$$T = mg \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{--- (ii) } \quad \textcircled{5}$$

$$(i) , (ii) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2a.$$

$\textcircled{5}$

$\textcircled{25}$

$$y = x + \frac{a}{2}, \ddot{y} = \ddot{x}, \text{ என எழுதின } (5)$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}, (5)$$

$$\text{இங்கு } \omega^2 = \frac{g}{a}.$$

10

எழிமை இசை இயக்கத்தின் மையம் C ஆனது $\ddot{x} = 0$. i.e. $y = 0$ or $x = \frac{-a}{2}$. (5) + (5)

$OC = \frac{a}{2}$, ஆகுமாறு OA இல் புள்ளி C உள்ளது (OA இன் நடுப்புள்ளி)

வீச்சம் c :

$$\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2), \text{ இங்கு } \omega^2 = \frac{g}{a}.$$

$$y = \frac{5a}{2} \text{ (at B). ஆக } \dot{y} = 0 (5)$$

$$\therefore 0 = \omega^2 \left(c^2 - \left(\frac{5a}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}. (5)$$

பொருள் A ஐ அடையும் போது கதி v என்க

$$A \text{ இல் } y = \frac{a}{2}, u^2 = \frac{g}{a} \left(\left(\frac{5a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right). (5) + (5)$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{6ga}. (5)$$

35

A இலிருந்து O க்கு P இன் இயக்கம்

இயக்கம் தளத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் உள்ளது

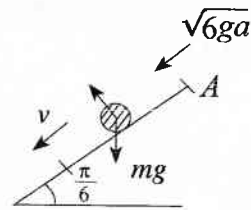
$$v^2 = u^2 + 2fs : \text{ ஐ பிரயோகிக்க}$$

$$\checkmark v^2 = 6ga + 2 \left(\frac{a}{2} \right) \cdot a (5)$$

$$\therefore v^2 = 7ga$$

$$\therefore v = \sqrt{7ga} (5)$$

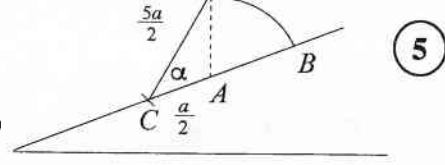
10



எழிமை இசை இயக்கத்தின் இன் கீழ் B இலிருந்து A ஐ அடைய P எடுத்துக் கொண்ட நேரம்

$$wt_1 = \alpha. \quad (5) \quad \text{எனவே } \cos \alpha = \frac{\frac{2}{5a}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}. \quad (5)$$

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\cos^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) \right), \quad (5)$$



A யிலிருந்து O க்கு செல்ல எடுத்த நேரம்

$$v = u + at : \text{இனை பிரயோகிக்க } (5)$$

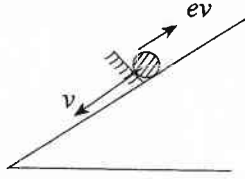
$$\swarrow \sqrt{7ga} = \sqrt{6ga} - \frac{g}{2} t_2$$

$$\therefore t_2 = \frac{2\sqrt{a}}{g} (\sqrt{7} - \sqrt{6}) \quad (5) = 2k\sqrt{\frac{a}{g}}, \text{ இங்கு } k = \sqrt{7} - \sqrt{6}.$$

B இலிருந்து O க்கு மொத்த நேரம் (5)

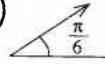
$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\cos^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) + 2k \right), \text{ இங்கு } k = \sqrt{7} - \sqrt{6}.$$

35



O இலுள்ள அழுத்தமான தடுப்பை தாக்கிய உடன் P இன் வேகம் (5)

$$ev = e\sqrt{7gh}$$



துணிக்கையின் தொடர்ந்து வரும் இயக்கம் எழிமை இசை இயக்கமாய் இராது $0 < z \leq a$, இங்கு z ஆனது புவியீர்ப்பின் கீழ் தளத்தில் மேல் நோக்கி சென்ற தூரம் எனின் (10)

$$v^2 = u^2 + 2as \text{ இனை பிரயோகிக்க}$$

$$\swarrow 0 = (ev)^2 - 2\left(\frac{g}{2}\right)z \quad (5)$$

$$\Rightarrow z = 7e^2a \quad (5)$$

இங்கு, $0 < z \leq a$

$$\Leftrightarrow 0 < 7e^2a \leq a \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 0 < e \leq \frac{1}{\sqrt{7}}. \quad (5)$$

35

14. (a) $OACB$ ஓர் இணைகரம் எனவும் D ஆனது AC மீது $AD:DC=2:1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும்; இங்கு $\lambda > 0$ ஆகும். \vec{OC}, \vec{BD} ஆகிய காவிகளை $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda$ ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க.

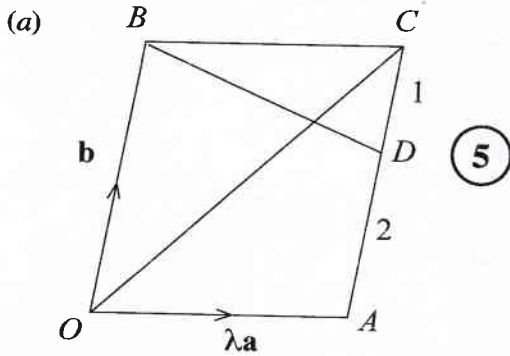
இப்போது \vec{OC} ஆனது \vec{BD} இற்குச் செங்குத்தானதெனக் கொள்வோம். $3|\mathbf{a}|^2 \lambda^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ எனக் காட்டி, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ஆகவும் $\hat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின், λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) மையம் O ஆகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவும் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் தளத்தில் உள்ள மூன்று விசைகளை ஒரு தொகுதி கொண்டுள்ளது. உற்பத்தி O இலும் Ox -அச்சு \vec{OB} வழியேயும் Oy -அச்சு \vec{OH} வழியேயும் இருக்க விசைகளும் அவற்றின் தாக்கப் புள்ளிகளும் வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கீழேயுள்ள அட்டவணையிற் காட்டப்பட்டுள்ளன; இங்கு H ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும். (P நியூற்றனிலும் a மீற்றரிலும் அளக்கப்படுகின்றன.)

தாக்கப் புள்ளி	தானக் காவி	விசை
A	$a\mathbf{i} - \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i} + \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

இப்போது \vec{FE} வழியே தாக்கும் பருமன் $6PN$ ஐ உடைய ஒரு மேலதிக விசை இத்தொகுதியில் புகுத்தப்படுகின்றது. புதிய தொகுதி ஒருங்கும் தனி விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.



$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$\vec{OC} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$= \lambda \mathbf{a} + \frac{1}{3} \vec{CA}$$

$$\vec{BD} = \lambda \mathbf{a} + -\frac{1}{3} \mathbf{b}$$

$$\vec{OC} \perp \vec{BD}, \text{ ஆதலால் அவற்றின் எண்ணிப்பெருக்கம் } = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{a} - \frac{1}{3} \mathbf{b}) = 0$$

$$\lambda^2 |\mathbf{a}|^2 + (1 - \frac{1}{3})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\lambda - \frac{1}{3} |\mathbf{b}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$$

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|, \hat{AOB} = \frac{\pi}{3} \text{ என தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2$$

மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$3|a|^2\lambda^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}|a|^2\lambda - |a|^2 = 0$$

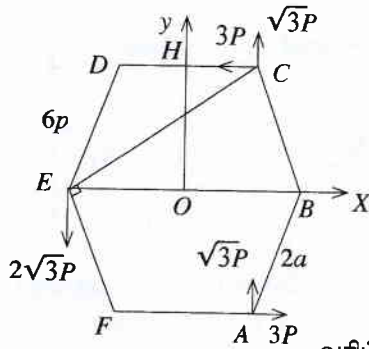
$$3\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$\lambda > 0 \text{ ஆதலால் } \lambda = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \quad (5)$$

50

(b)



தாக்கப்புள்ளிகளின் தானக்காவிகள்

$$\vec{OA} = ai - \sqrt{3}aj$$

$$\vec{OC} = ai + \sqrt{3}aj$$

$$\vec{OE} = -2ai$$

வரிப்படத்திற்கு (15)

O இல் தொகுதியை ஒடுக்க

$$\rightarrow X = 3P - 3P = 0 \quad (10)$$

} $M \neq 0$ ஆயின் தொகுதி ஒரு இணைக்கு
சமவலுவானது

$$\uparrow Y = \sqrt{3}P + \sqrt{3}P - 2\sqrt{3}P = 0 \quad (10)$$

$$O \curvearrowright 2 \times 3P \cdot a\sqrt{3}P + 2a\sqrt{3}P + (2a) \cdot 2\sqrt{3}P = M = 12a\sqrt{3}P \curvearrowright$$

இணை $M \neq 0$ இன் (20)

திருப்பம் இடஞ்சுழியாக $12a\sqrt{3}P$ ஆகும்

(5) + (5)

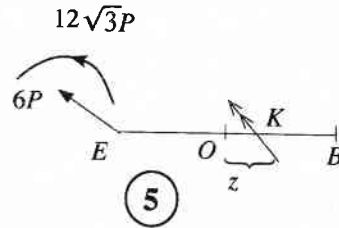
65

பருமன்

$$= 6P \quad (5)$$

திசை

$$= \frac{\pi}{3} \quad (5)$$



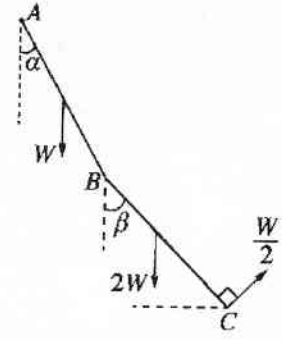
$$K \curvearrowright -6P \times (2a+z) \frac{\sqrt{3}}{2} + 12a\sqrt{3}P = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow z = 2a \quad (5)$$

புதிய தொகுதி \vec{BC} வழியே தாக்கும் ஒரு தனி விசைக்கு ஒருங்கும் (5)

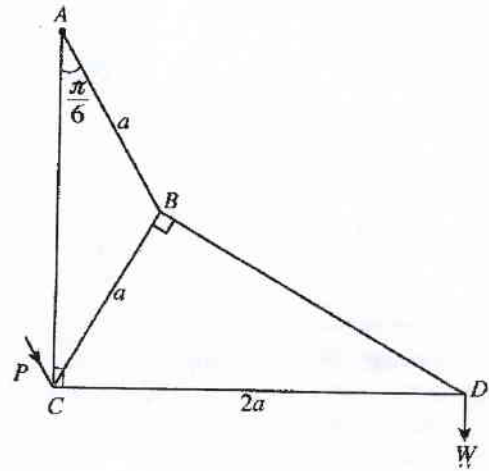
35

15. (a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB இன் நிறை W உம் கோல் BC இன் நிறை $2W$ உம் ஆகும். முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, BC ஆகிய கோல்கள் கீழ்முக நிலைக்குத்துவன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கிக்கொண்டிருக்க இத்தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு C இல் BC இற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை $\frac{W}{2}$ இனால் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. $\beta = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டி, மூட்டு B இல் கோல் AB ஆனது கோல் BC மீது உருற்றும் மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.



$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ எனவும் காட்டுக.

(b) உருவிற காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, BD, DC, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. இங்கு $AB = CB = a, CD = 2a, \hat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு D இல் ஒரு சுமை W தொங்கவிடப்பட்டு. AC நிலைக்குத்தாகவும் CD கிடையாகவும் இருக்க மூட்டு C இல் கோல் AB இற்குச் சமாதரமாக உருவிற காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை P இனால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சட்டப்படல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி D, B, C ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.



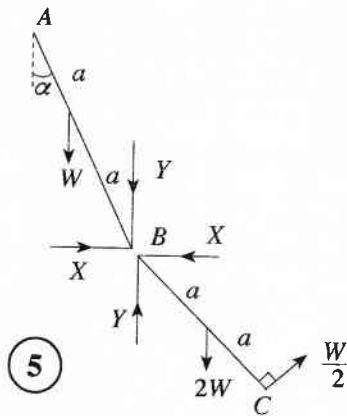
இதிலிருந்து

- (i) இழுவைகளா, உதைப்புகளா என எடுத்துரைத்து ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளையும்
- (ii) P இன் பெறுமானத்தையும்

காண்க.

(a)

BC க்கு B பற்றி திருப்பம் எடுக்க



$B \rightarrow \frac{W}{2} (2a) = 2W \cdot a \sin \beta$ (10)

$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2}, \therefore \beta = \frac{\pi}{6}$. (5) + (5)

BC க்கு $\leftarrow X = \frac{W}{2} \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{4} W$. (5)

$\uparrow BC$ க்கு $Y = 2W - \frac{W}{2} \sin \beta$ (5)

$= \frac{7}{4} W$. (5)

40

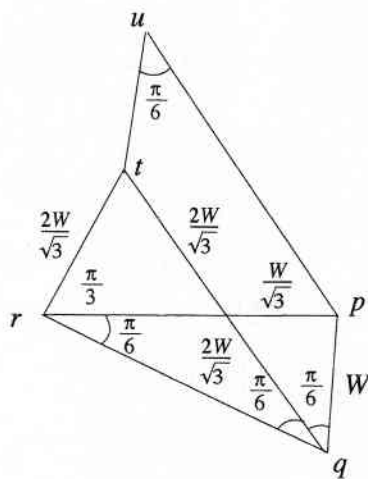
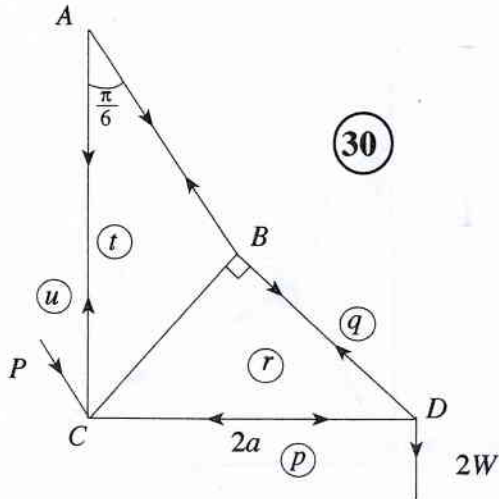
$$A \curvearrowright X \cdot 2a \cos \alpha - Y 2a \sin \alpha - W a \sin \alpha = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cos \alpha = 9 \sin \alpha. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}. \quad (5)$$

20

(b)



Rod	Tension	Thrust
AB	$\frac{4W}{\sqrt{3}}$	-
BC	$\frac{2W}{\sqrt{3}}$	-
AC	W	-
BD	2W	-
CD	-	$\sqrt{3} W$

$$P = pr = \frac{4W}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

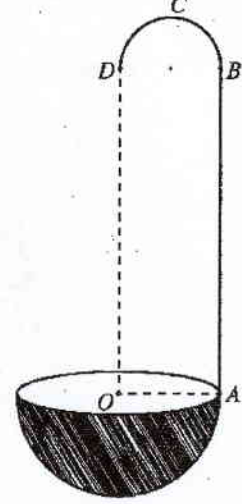
90

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைவட்டக் கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலும்

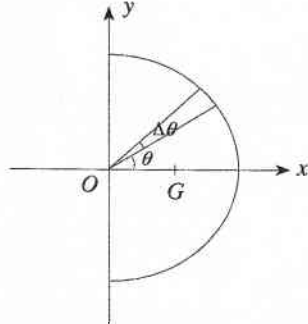
(ii) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்திலும்

இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

மையம் O ஐயும் ஆரை $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டுடன் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நீளம் $2\pi a$ ஐ உடைய ஒரு நேர்ப் பகுதி AB ஐயும் விட்டம் BD ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டப் பகுதி BCD ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான கம்பியினால் செய்யப்படும் ஒரு மெல்லிய கைப்பிடி $ABCD$ ஐ விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு கரண்டி செய்யப்பட்டுள்ளது. புள்ளி A ஆனது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு மீது இருக்கும் அதே வேளை OA ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாகவும் OD ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளன. மேலும் BCD ஆனது $OABD$ இன் தளத்தில் அமைந்துள்ளது. அரைக்கோளத்தின் அலகுப் பரப்பளவின் திணிவு σ உம் கைப்பிடியின் அலகு நீளத்தின் திணிவு $\frac{\sigma}{2}$ உம் ஆகும். கரண்டியின் திணிவு மையம் OA இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{2}{19\pi}(8\pi - 2\pi^2 - 1)a$ இலும் O இனாடாகவும் D இனாடாகவும் செல்லும் கோட்டிலிருந்து தூரம் $\frac{5}{19}a$ இலும் உள்ளதெனக் காட்டுக. கரண்டி ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது அரைக்கோள மேற்பரப்பு அதனுடன் தொடுகையுறுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோள மேற்பரப்புக்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{7}$ ஆகும். \vec{AO} இன் திசையிலே A இற் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசையினால் OD நிலைக்குத்தாக இருக்கக் கரண்டி நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.



(i) அரை வட்ட கம்பி



சமச்சீரின் படி புவிபீர்ப்பு மையம் G , இன் Ox அச்சில் இருக்கும்

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, இங்கு P அலகு நீளத்துக்கான திணிவு

$OG = \bar{x}$, எனின்

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho d\theta} \quad (10)$$

$$= \frac{a \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} \quad (5)$$

$$= \frac{2a}{\pi} \quad (5)$$

எனவே திணிவுமையம் O இலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்கும்

25

(ii) அரைக்கோள ஒரு

சமச்சீரீன்படி, திணிவுமையம் G ஆனது Ox அச்சில் இருக்கும் (5)

$$\Delta m = 2\pi (a \sin\theta) a \sigma \Delta\theta$$

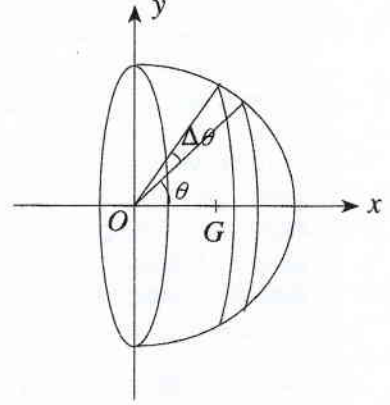
σ அலகு பரப்புக்கான திணிவு ஆகும்

$$OG = \bar{x}, \text{ எனின்}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (a \sin\theta) a \sigma a \cos\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (a \sin\theta) a \sigma d\theta} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{a \sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{-\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{a}{2} \cdot (5)$$

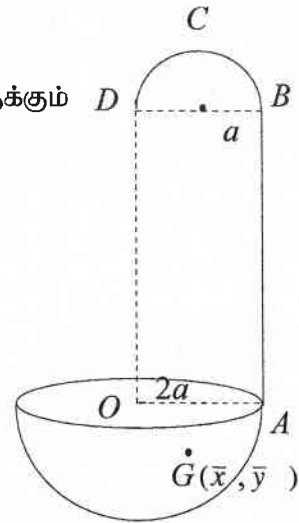


எனவே, திணிவு மையம் O இலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்திலிருக்கும்

30

$G(\bar{x}, \bar{y})$ அத்துடன்

Ox அச்சு OA வழியேயும் Oy அச்சு OD வழியேயும் இருக்கும் என்க.



Object	Mass	Distance from OD (\rightarrow)	Distance from OA (\downarrow)
நேர்ப் பகுதி AB	$\pi a^2 \sigma$ (5)	$2a$	πa (5)
அரைவட்டப் பகுதி BCD	$\frac{\pi a^2 \sigma}{2}$ (5)	a	$2\pi a + \frac{2a}{\pi}$ (5)
அரைக்கோள ஓடு	$8\pi a^2 \sigma$ (5)	0	$-a$ (5)
கரண்டி	$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}$ (5)	\bar{x}	\bar{y}

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2} \bar{y} = \pi a^2 \sigma \cdot \pi a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2} (2\pi a + \frac{2a}{\pi}) + 8\pi a^2 \sigma (-a) \quad (10)$$

$$\frac{19\pi}{2} \bar{y} = -8\pi a + 2\pi a + a \quad (5)$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{-2}{19\pi} (8\pi - 2\pi^2 - 1)a$$

\therefore கரண்டியின் திணிவுமையம் OAக்கு கீழ்

$\frac{2}{19\pi} (8\pi - 2\pi^2 - 1)a$ என்ற தூரத்தில் இருக்கும்

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2} \bar{x} = \pi a^2 \sigma \cdot 2a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2} \cdot a + 8\pi a^2 \sigma \cdot 0 \quad (10)$$

$$\therefore \frac{19}{2} \bar{x} = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{5a}{19} \quad (5)$$

\therefore கரண்டியின் திணிவுமையம் OD இலிருந்து $\frac{5a}{19}$ என்ற தூரத்திலிருக்கும்

$$\rightarrow F = P \quad (5)$$

$$\uparrow R = W \quad (5)$$

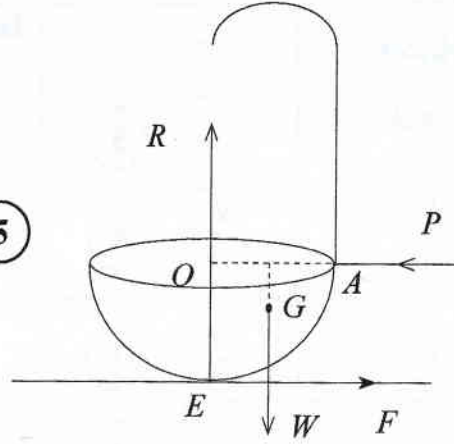
$$E \curvearrowright P \times 2a = W \times \frac{5}{19}a \quad (5)$$

$$\therefore P = \frac{5}{38}W.$$

$$\Rightarrow F = \frac{5}{38}W. \quad (5)$$

$$\therefore \frac{F}{R} = \frac{5}{38} \quad (5)$$

$$\therefore > \frac{F}{R} \quad (5)$$



எனவே கரண்டியை சமநிலையில் வைத்திருக்க முடியும்

30

17. (a) தொடக்கத்தில் ஒவ்வொன்றும் வெள்ளை நிறமாக அல்லது கறுப்பு நிறமாக உள்ள, நிறங்களில் தவிர எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான 3 பந்துகள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. இப்போது நிறத்தைத் தவிர பெட்டியில் உள்ள பந்துகளுக்கு எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து பெட்டியில் இடப்பட்டுப் பின்னர் பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது. பெட்டியில் உள்ள பந்துகளின் தொடக்கச் சேர்க்கைகளின் நான்கு இயல்தகவுகளும் சம சந்தர்ப்பமானவை என எடுத்துக்கொண்டு,

- (i) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தாக,
 (ii) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தெனத் தரப்படும்போது தொடக்கத்தில் பெட்டியில் செப்பமாக 2 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) μ, σ ஆகியன முறையே பெறுமானத் தொடை $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகுமெனக் கொள்வோம். பெறுமானத் தொடை $\{\alpha x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ இன் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க; இங்கு α ஒரு மாறிலி. ஒரு குறித்த கம்பனியின் 50 தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் பொழிப்பாக்கப்பட்டுள்ளன:

மாதச் சம்பளம் (ஆயிரம் ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
5 - 15	9
15 - 25	11
25 - 35	14
35 - 45	10
45 - 55	6

50 தொழிலாளர்களினதும் மாதச் சம்பளங்களின் இடையையும் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் ஒவ்வொரு தொழிலாளரினதும் மாதச் சம்பளம் $p\%$ இனால் அதிகரிக்கப்படுகின்றது. மேற்குறித்த 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் இடைநு. 29 172 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. p இன் பெறுமானத்தையும் 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

(a) E_i என்பது i எண்ணிக்கையுடைய வெள்ளைப் பந்துகளை கொண்ட பெட்டி என்க

$$i = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{எனின் } P(E_i) = \frac{1}{4} \text{ for } i = 0, 1, 2, 3$$

W என்பது எழுந்தமானமாக எடுக்கப்பட்ட பந்து வெள்ளையாய் இருக்கும் நிகழ்வு என்க எனின்

$$\begin{aligned} \text{(i) } P(W) &= \sum_{i=0}^3 P(W | E_i) P(E_i) \quad \text{(10)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \quad \text{(10)} \\ &= \frac{5}{8} \quad \text{(5)} \end{aligned}$$

25

(ii) பேயரின் தேற்றப்படி

$$P(E_1 | W) = \frac{P(W | E_1) P(E_1)}{P(W)} \quad \text{(10)}$$

(5)

Handwritten text, possibly a name or title.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten text across the middle of the page.

(2)

Handwritten text, possibly a name or title.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten mark or symbol.

Handwritten mark or symbol.