அந்தரங்கமானது

NEW

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2019

10-இணைந்த கணிதம்-I

புதிய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த புள்ளியிடும் திட்டம் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளும் கருத்துக்களுக்கிணங்க, இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றம் பெறலாம்

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

க.பொ.த(உ.த) பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் I

பகுதி : A = $10 \times 25 = 250$

பகுதி : B = $05 \times 150 = 100$

மொத்தம் $= 1000 / 10$

பத்திரம் I இறுதிப் புள்ளி $= 100$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது தெளிவான இலக்கத்தில் எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் $\boxed{}$ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடப்பட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.

அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.

துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை ○ அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலைண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

o o o

பகுதி A

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ என நிறுவுக.

n=1 இற்கு, L.H.S. = $2 \times 1 - 1 = 1$, R.H.S. = $1^2 = 1$ 5

$n=1$இற்கு முடிவு உண்மை

n=p, இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $p \in \mathbb{Z}^+$.

i.e. $\sum_{r=1}^{p} (2r-1) = p^2$. 5

எனவே $\sum_{r=1}^{p+1} (2r-1) = \sum_{r=1}^{p} (2r-1) + \left(2(p+1)-1\right)$ 5

$= p^2 + (2p+1)$

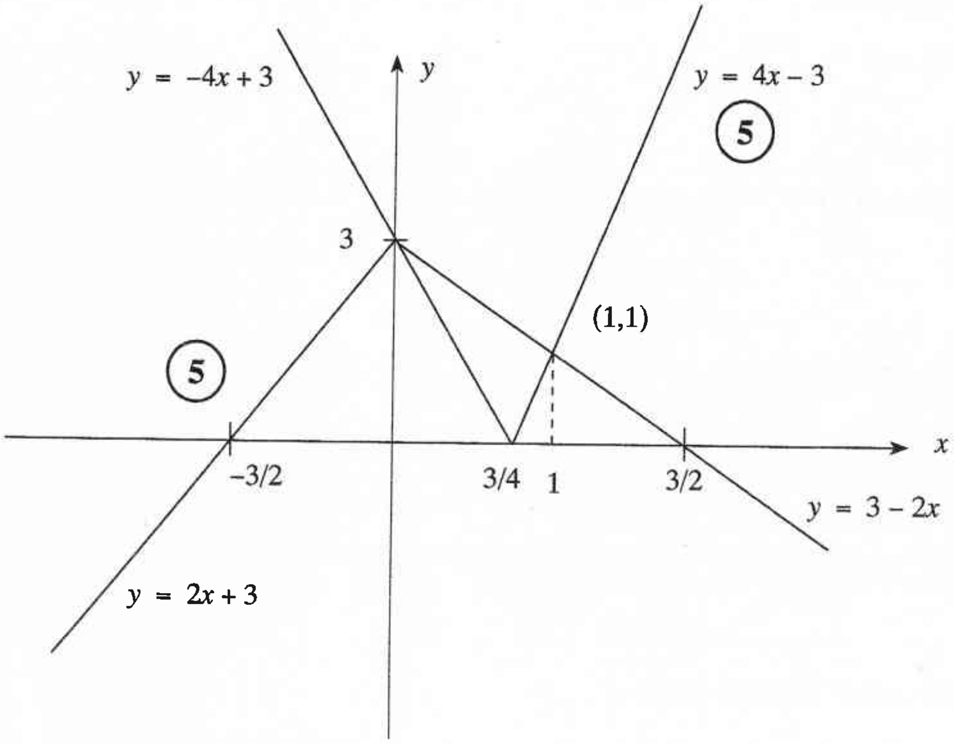
$= (p+1)^2$. 5

n = p இற்கு முடிவு உண்மை எனின் n = p + 1 இற்கு முடிவு உண்மை ஆகின்றது.
அத்துடன் n=1 இற்கு உண்மை என காட்டப்பட்டது.
கணிதத் தொகுத்தறித்தத்துவத்தால் எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$. இற்கும் முடிவு உண்மை ஆகும்

5

25

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=|4x-3|$, $y=3-2|x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $|2x-3|+|x|<3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



வரைபுகளின் வெட்டுப்புள்ளிகளில்

$$4x-3=3-2x \Rightarrow x=1$$
$$-4x+3=3+2x \Rightarrow x=0 \quad 5$$

வரைபுகளிலிருந்து,

$$|4x-3|<3-2|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$$

$$\therefore \ |4x-3|+|2x|<3 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$$

x ஐ $\frac{x}{2}$ ஆல் பிரதியீடு செய்வதால்,

$$|2x-3|+|x|<3 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<2. \quad 5$$

எனவே $|2x-3|+|x|<3$ இனைத் திருப்தி செய்யும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களின் தொடை $\{x : 0<x<2\}$. 5

<u>வேறு முறை</u>

முன்புபோல் வரைபுகளுக்கு 5 + 5

<u>x இன் பெறுமானங்கள்</u>

$|2x-3| + |x| < 3$

<u>Case (i)</u> $x \le 0$:

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 - x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

இவ்வகையில் தீர்வு இல்லை

<u>Case (ii)</u> $0 < x \le \frac{3}{2}$

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

இவ்வகையில் x இன் தீர்வு $0 < x \le \frac{3}{2}$.

<u>Case (iii)</u> $x > \frac{3}{2}$

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

$\Leftrightarrow x < 2$

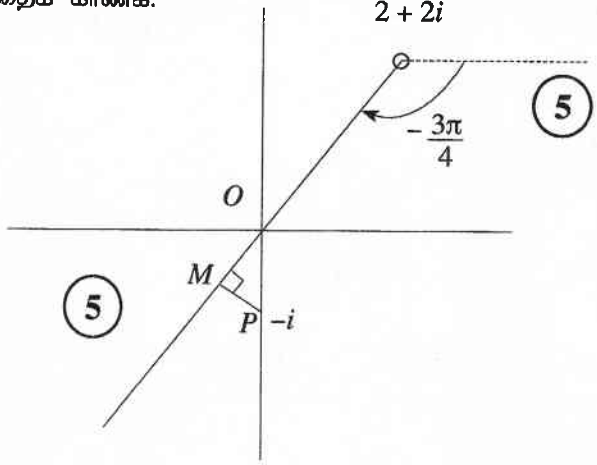
இவ்வகையில் x இன் தீர்வு $\frac{3}{2} < x < 2$

All 3 cases with correct solutions	10
Any 2 cases with correct solutions	5

எனவே, முடிவாக x இன் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $0 < x < 2$. 5

25

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\mathrm{Arg}(z-2-2i)=-\frac{3\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathrm{Arg}(z-2-2i)=-\frac{3\pi}{4}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $|i\bar{z}+1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.



அவதானிக்கும் போது

$$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$$

$$= |(z+i)|$$

$$= |z-(-i)| \quad 5$$

எனவே $|(i\bar{z}+1)|$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் PM இற்குச் சமன் 5

அத்துடன் PM $= 1 \,.\, \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 5

25

4. $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^7$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^6 இன் குணகம் 35 எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த ஈருறுப்பு விரியில் x ஐச் சாராத உறுப்பு **இல்லை** எனவும் காட்டுக.

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r \, (x^3)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r}$$ 5

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r \, x^{5r-14}$$

x^6 : $5r - 14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ 5

x^6 இன் குணகம் $x^6 = {}^7C_4 = 35$ 5

விரியில் x சாராத உறுப்பிற்கு

$5r - 14 = 0.$ 5

$r \in \mathbb{Z}^+$ ஆதலால் இது சாத்தியமற்று 5

25

5. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \dfrac{1}{2\pi}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\frac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 1 \quad 5$$

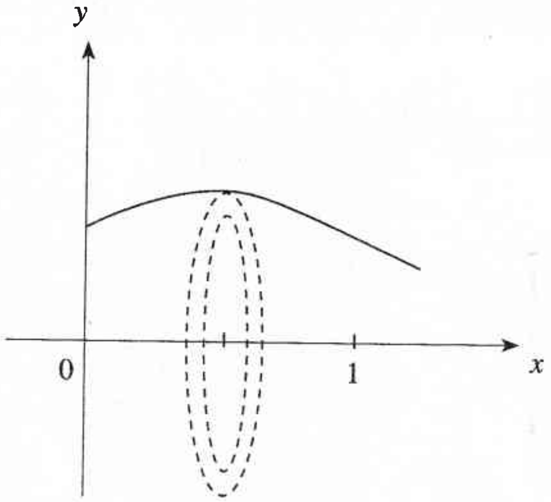
$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$$

5 5

$$= \frac{1}{2\pi} \quad 5$$

25

6. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x=0,\ x=1,\ y=0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x - அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{\pi}{4}(\pi+\ln 4)$ எனக் காட்டுக.



பிறப்பிக்கப்பட்ட கன அளவு $= \displaystyle\int_0^1 \pi\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)^2 dx$ 5

$= \pi\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$ 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \tan^{-1}x\Big|_0^1\right)$ 5 + 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(\ln 4 + \pi\right)$ 5

25

7. C ஆனது $t \in \mathbb{R}$ இற்கு $x = at^2$, $y = 2at$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் பரவளைவெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \neq 0$. பரவளைவு C இற்குப் புள்ளி $\left(at^2, 2at\right)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
பரவளைவு C மீது புள்ளி $P \equiv (4a, 4a)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோடு இப்பரவளைவை மறுபடியும் புள்ளி $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ இற் சந்திக்கின்றது. $T = -3$ எனக் காட்டுக.

$x = at^2$, $y = 2at$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t} \qquad t \neq 0. \quad 5$$

செவ்வன் கோட்டின் சாய்வு $= -t$

$(at^2, 2at)$ இல் செவ்வனின் சமன்பாடு

$y - 2at = -t\,(x - at^2)$

$y + tx = 2at + at^3$ 5 ($t = 0$ இற்கு நடக்கும்)

$P \equiv (4a, 4a)$ ஆனது C மீது ஆகையால் $\Rightarrow t = 2$.

P இல் செவ்வன் கோடு : $y + 2x = 4a + 8a = 12a$ 5

இது C ஐ $(aT^2, 2aT)$, இல் சந்திப்பதால்

$2aT + 2aT^2 = 12a$. 5

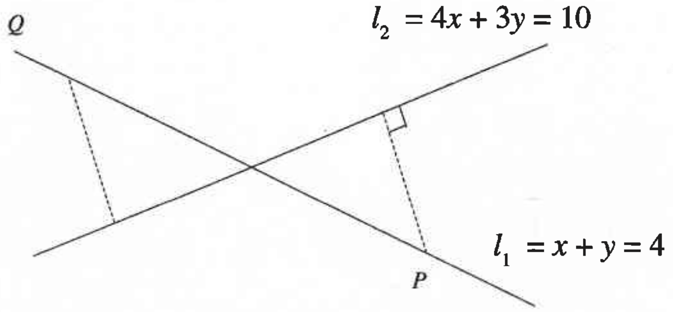
$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T-2)(T+3) = 0$

$\Leftrightarrow T = 2$ or $T = -3$

$\therefore\ T = -3$ 5

$\boxed{25}$

8. l_1 , l_2 ஆகியன முறையே $x + y = 4$, $4x + 3y = 10$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். கோடு l_1 மீது P, Q என்னும் இரு வேறுவேறான புள்ளிகள், அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் இருந்து கோடு l_2 இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 1 அலகாக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன. P, Q ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



கோடு l_1 மீதான யாதாயினும் புள்ளி

$(t, 4 - t),\ t \in \mathbb{R}$. 5 என எழுதப்படலாம்

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ என்க

P இலிருந்து l_2 இற்கான செங்குத்து தூரம் $= \dfrac{\left|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$ 5

$\therefore\ |t_1 + 2| = 5$

$\therefore\ t_1 = -7$ or $t_1 = 3$ 5

எனவே P, Q இன் ஆள் கூறுகள்

$(-7, 11)$, $(3, 1)$. 5 + 5

25

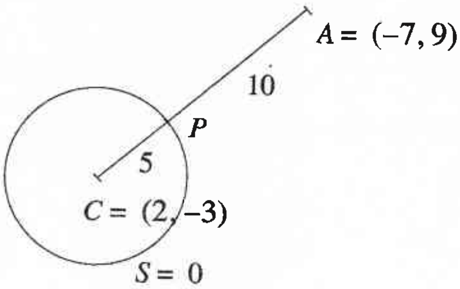
9. புள்ளி $A \equiv (-7, 9)$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ இற்கு வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டுக. வட்டம் $S = 0$ மீது உள்ள, புள்ளி A இற்கு மிக அண்மையில் இருக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S = 0$ இன் மையம் $C = (2, -3)$. 5

$S = 0$ இன் ஆரை $R = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5$. 5

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5$. 5

எனவே புள்ளி A தரப்பட்ட வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்



CA வட்டம் $S=0$ இனை சந்திக்கும் புள்ளி P, A இற்கு அண்மையில் உள்ள வட்டம் $S=0$ இன் மேலுள்ள புள்ளியாகும்.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ 5

$$\therefore \; P \equiv \left(\frac{3 \times 2 + 1\,(-7)}{3}, \; \frac{2\,(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

i.e. $P \equiv (-1, 1)$ 5

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ இற்கு $t = \tan\frac{\theta}{2}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $n \in \mathbb{Z}$ ஆகும். $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக.
$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ **என உய்த்தறிக.**

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq (2n+1)\pi. \text{ இற்கு}$$

5

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ 5

$\theta = \frac{\pi}{6}$. என்க $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 5

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,(1+t^2) = 2\,(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})\,t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \times \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$ 5

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$ 5 $\left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$

25

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $p \in \mathbb{R}$ எனவும் $0 < p \le 1$ எனவும் கொள்வோம். 1 ஆனது சமன்பாடு $p^2x^2 + 2x + p = 0$ இன் ஒரு மூலம் **அன்று** எனக் காட்டுக.
α, β ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் மெய்யெனக் காட்டுக.
$\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ ஆகியவற்றை p இல் எழுதி

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

எனக் காட்டுக.
$\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, $\dfrac{\beta}{\beta-1}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு
$(p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ எனவும் இம்மூலங்கள் இரண்டும் நேர் எனவும் காட்டுக.

(b) c, d ஆகியன இரு **பூச்சியமல்லாத** மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ எனவும் கொள்வோம்.
$(x-c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் $f(x)$ ஆனது $(x-d)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி cd எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு, $f(x)$ ஆனது $(x+2)^2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியைக் காண்க.

(a) $p^2x^2 + 2x + p = 0.$ இன் ஒரு மூலம் 1 எனக்கொண்டால்

$x = 1$ ஐப் பிரதியிட $\qquad p^2 + 2 + p = 0.$ 5

இது சாத்தியமன்று எனெனில் $p > 0$ ஆக $p^2 + 2 + p > 0.$ 5

எனவே 1, $p^2x^2 + 2x + p = 0$ இன் மூலம் அன்று $\boxed{10}$

பிரித்துக் காட்டி $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ 10

$= 4(1 - p^3)$

$\ge 0 \ (\because\ 0 < p \le 1)$ 5

ஆகவே α, β மெய்யானவை 5 $\boxed{20}$

$\alpha + \beta = -\dfrac{2}{p^2}, \qquad \alpha\beta = \dfrac{1}{p}$ 5 + 5

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1)} \quad 5$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)\,(\beta-1)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)\,(\beta-1)} \quad 5$$

$$= \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}\right) \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\,(\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{p}{p^2+p+2} \,. \quad 5$$

எனவே தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2+p+2}\,x + \frac{p}{p^2+p+2} = 0 \quad 10$$

$$\Rightarrow \quad (p^2+p+2)\,x^2 - 2\,(p+1)\,x + p = 0 \quad 5$$

$\boxed{35}$

மேலும் $\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$, $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ மெய்யானவை,

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} > 0, \ (\because \ p > 0)\,,$$

5

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2+p+2} > 0, \ (\because \ p > 0)\,.$$

எனவே இந்த இரண்டு மூலங்களும் நேரானவை 5

$\boxed{10}$

(b) $f(x) = x^2 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ ஒரு காரணி ஆகையால் $f(c) = 0.$ 5

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ 5

$\Rightarrow c^2\,(c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because\ c \neq 0)$ 5

$f(x)$ இனை $(x-d)$, ஆல் வகுக்கும் போது மீதி cd எனவே

5 $f(d) = cd.$ 5

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2\,(d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because\ d \neq 0)$ 5

$\therefore\ c = -2,\ d = -1.$

30

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ இனை $(x+2)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $Ax+B$ என்க

$f(x) \equiv (x+2)^2\, Q(x) + (Ax+B)$, இங்கு $Q(x)$ படி 1 உடைய பல்லுறுப்பி

$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2\, Q(x) + Ax + B.$ 5

$x = -2$, ஆக $0 = -2A + B.$ 5

வகையிடும் போது

$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2\, Q'(x) + 2Q(x)\,(x+2) + A.$ 5

மேலும் $x = -2$, ஆக

$12 - 8 + 1 = A$ 5

$\therefore\ A = 5, \quad B = 10$

எனவே மீதி $5x + 10.$ 5

25

வேறு முறை

நீண்ட வகுத்தல் செய்முறையால்

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 & \qquad\qquad 5x + 10.
\end{array}
$$

15

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x^2 + 4x + 4)(x-2) + (5x+10)$$

எனவே மீதி : $5x + 10.$ 10

25

12. (a) P_1, P_2 ஆகியன முறையே $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$, $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு தொடைகளெனக் கொள்வோம். $P_1 \cup P_2$ இலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 3 வெவ்வேறு எழுத்துகளையும் 3 வெவ்வேறு இலக்கங்களையும் கொண்டு 6 மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கடவுச்சொல்லை உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வெவ்வேறு கடவுச்சொற்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க:

(i) எல்லா 6 மூலகங்களும் P_1 இலிருந்து மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(ii) 3 மூலகங்கள் P_1 இலிருந்தும் ஏனைய 3 மூலகங்கள் P_2 இலிருந்தும் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ எனவும் $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ எனக் காட்டுக.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ எனக் கொள்வோம்.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ என **உய்த்தறிக.**

இதிலிருந்து, முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$, $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 இல் இருந்து 3 வெவ்வேறு எண்களையும் 3 வெவ்வேறு எழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்வதற்கான வெவ்வேறு வகைகளின் எண்ணிக்கை $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ (10)

எனவே P_1 இல் இருந்து 6 மூலங்களையும் தெரிவு செய்வதால் பெறப்படும் கடவுச்சொற்களின் எண்ணிக்கை $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6!$ (5)

$= 28800$ (5)

20

(ii)

Different ways of selecting				Number of Passwords	
from P_1		from P_2			
Letters	Digits	Letters	Digits		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! = 28800$	10
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6! = 864000$	10
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6! = 864000$	10
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6! = 28800$	10

எனவே 3 மூலகங்களை P_1 இலிருந்தும் மற்றய 3 மூலகங்களை P_2 இல் இருந்தும் தெரிவு செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் கடவுச் சொற்களின் எண்ணிக்கை $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

10

$\boxed{50}$

(b) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$, $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

எனவே

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)} \quad 5$$

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)} \quad 5$$

$$= 6U_r \quad 5$$

$\boxed{15}$

அவதானிக்குக

$$\begin{aligned}
r = 1; &\quad 6U_1 = V_1 - \cancel{V_3}, \\
r = 2; &\quad 6U_2 = V_2 - \cancel{V_4}, \\
r = 3; &\quad 6U_3 = \cancel{V_3} - V_5, \\
r = 4; &\quad 6U_4 = \cancel{V_4} - V_6, \\
&\quad \vdots \\
r = n-3; &\quad 6U_{n-3} = V_{n-3} - \cancel{V_{n-1}} \\
r = n-2; &\quad 6U_{n-2} = V_{n-2} - \cancel{V_n} \\
r = n-1; &\quad 6U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - V_{n+1} \\
r = n; &\quad 6U_n = \cancel{V_n} - V_{n+2}
\end{aligned}$$

10

10

$$\therefore \quad 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad 10$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad 10$$

$\boxed{40}$

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad 5$$

$\boxed{10}$

அவதானிக்குக

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}\right) \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad 5$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ கூட்டுத்தொகை $\frac{5}{144}$ இற்கு ஒருங்கும், 5

$\boxed{15}$

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ ஆகியன $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயங்களெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

$a = 2,\ b = 1$ எனக் காட்டுக.

அத்துடன் $\mathbf{C}^{-1}$ **இருப்பதில்லை** எனவும் காட்டுக.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{P}^{-1}$ ஐ எழுதி, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{Q}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $\operatorname{Re} z \le |z|$ எனவும்

(ii) $z_2 \neq 0$ இற்கு $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ எனவும்

காட்டுக.

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ என **உய்த்தறிக.**

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ ஐ வாய்ப்புப் பார்த்து,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ இற்கு $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$1+\omega$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r(>0)$, $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ எனக் காட்டுக.

(*a*) $$AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

5 10

$$AB^T = C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow\ 2a - 3 = b,\quad a - 4 = -2$ and $a = b + 1.$ 10

$\Leftrightarrow\ a = 2, b = 1,$ இப் பெறுமானங்கள் எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் திருப்தி செய்யும் 5

$\boxed{30}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

$\therefore\ C^{-1}$ இல்லை 5

10

<u>வேறு முறை</u>

C^{-1} : இருப்பதற்கு

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5$$

ஆகுமாறு $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ உண்டு

$\Rightarrow p - 2r = 1,\ -p + 2r = 0,\ q - 2s = 0,\quad -q + 2s = 1$

இது முரண்பாடானது

$\therefore C^{-1}$ இல்லை 5

10

$$P = \frac{1}{2}(C - 2I) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 10$$

$$2P(Q + 3I) = P - I$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(Q + 3I) = I - P^{-1} \quad 5$$

$$\therefore \quad 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad 5$$

30

(b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$ என்க

$\operatorname{Re} z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ 5

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ என்க

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \times (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{1}$$ 10

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ 5

20

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$$; $z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு

5 by (i) 5 by (ii)

10

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1$$ 5

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$ 5

10

$$\Rightarrow \quad 1 = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \le \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| \text{ by (i)} \quad 5$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \text{ by (ii)}$$

$$= \frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1+z_2|} \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \qquad (\because |z_1+z_2| > 0)$$

$z_1 + z_2 = 0$, எனின்

$$|z_1+z_2| = 0 \le |z_1| + |z_2|$$

எனவே எல்லா $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. இற்கும் முடிவு உண்மை

10

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\, i)$

$$1 + \omega = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad 5$$

இங்கு $r = \sqrt{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$. 5

10

தாமோவரின் தே ற்றத்தால் $(1+\omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[\cos(10\theta) + i\sin(10\theta)\right]$ 5

$$1 + \overline{\omega} = \overline{1+\omega} = \sqrt{3}(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{3}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow (1+\overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10}\left[(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)\right] \quad 5$$

$$\therefore (1+\omega)^{10} + (1+\overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10} \times 2\cos(10\theta) \quad 5$$

$$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 243. \quad 5$$

20

---

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$ எனக் கொள்வோம்.

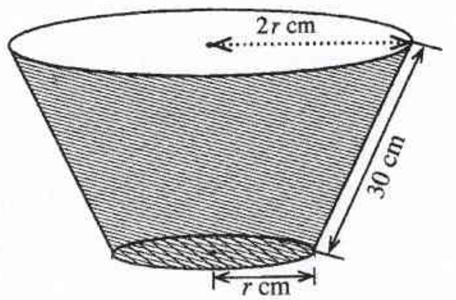
$x \neq 3$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\dfrac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், y – வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

$x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{18(x^2-33)}{(x-3)^5}$ **எனத் தரப்பட்டுள்ளது**. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளிகளின் x – ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(*b*) அருகே உள்ள உருவில் அடியைக் கொண்ட ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பேசின் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் சாய்ந்த நீளம் 30 cm உம் மேல் வட்ட விளிம்பின் ஆரை அடியின் ஆரையின் இரு மடங்கும் ஆகும். அடியின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம். பேசினின் கனவளவு V cm^3 ஆனது $0 < r < 30$ இற்கு $V = \dfrac{7}{3}\pi r^2\sqrt{900 - r^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

பேசினின் கனவளவு உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$

எனவே

$$f'(x) = 9\left[\frac{1}{(x-3)^3}(2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right] \quad 15$$

$$= 9\left[\frac{2x^2-10x+12-3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right]$$

$$= \frac{-9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \quad \text{for } x \neq 3 \quad 10$$

25

கிடை அணுகுகோடுகள் : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \therefore\ y = 0.$ 5

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$

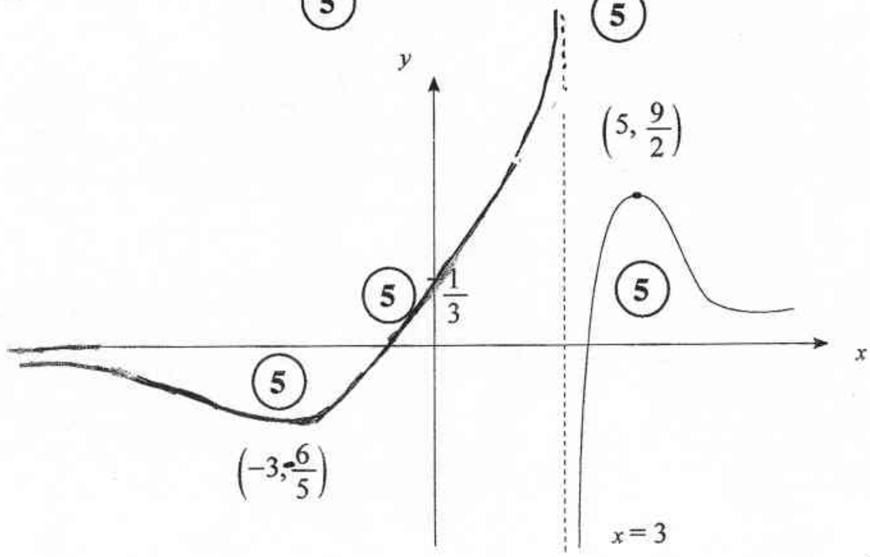
நிலைக்குத்து அணுகுகோடு : $x = 3.$ 5

திரும்பற் புள்ளிகளில் $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3,\ x = 5.$ 5

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
sign of $f'(x)$	(–)	(+)	(+)	(–)

$f(x)$ is 5 $\searrow$ 5 $\nearrow$ 5 $\nearrow$ 5 $\searrow$

இரண்டு திரும்பற் புள்ளிகள் உண்டு : $\left(-3, -\frac{5}{6}\right)$ இழிவு 5 $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ உயர்வு 5



60

$x \neq 3$ இற்கு

$$f''(x) = \frac{18\,(x - \sqrt{33}\,)(x + \sqrt{33}\,)}{(x-3)^5}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{33}$. 5

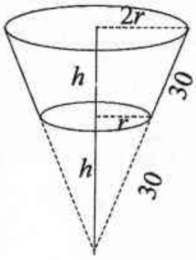
	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f''(x)$ இன்குறி	(–)	(+)	(–)	(+)
குவிவு	கீழ்க்குவிவு	மேற்குவிவு	கீழ்க்குவிவு	மேற்குவிவு

10

எனவே x ஆள்கூறுகள்

$x = -\sqrt{33}$, $x = \sqrt{33}$ உள்ள இரண்டு விபத்திப் புள்ளிகள் உண்டு 5 **20**

(*b*)



$0 < r < 30$ இற்கு

$h = \sqrt{900 - r^2}$ 5

கன அளவு V பின்வருமாறு தரப்படும்

$V = \frac{1}{3}\pi (2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 5

$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$. 5

15

$0 < r < 30$ இற்கு

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi \left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2 \frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right]$$ 5

$$= \frac{7}{3}\pi \left[\frac{2r(900 - r^2) - r^3}{\sqrt{900 - r^2}}\right]$$

$$= 7\pi r \frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}} .$$ 5

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$$ 5

$0 < r < 10\sqrt{6}$ இற்கு $\frac{dV}{dr} > 0$, $r > 10\sqrt{6}$, இற்கு $\frac{dV}{dr} < 0$

5 5

$r = 10\sqrt{6}$ ஆகும்போது V உயர்வடையும் 5

30

---

15. (*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ இற்குப் பிரதியீடு $x = 2\sin^2\theta + 3$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ ஐக் காண்க.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ எனக் கொள்வோம்.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ என **உய்த்தறிக.**

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int \ln(x-k)\,dx$ ஐக் காண்க; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

இதிலிருந்து, $\int f(t)\,dt$ ஐக் காண்க.

(*c*) a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(***a***) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$: இற்கு

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ (5)

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (5)

எனவே $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ (5)

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ (5)

$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ (5)

$= \frac{\pi}{2} - 1$ (5)

40

(*b*) $$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2)+B(x-1) \text{ for } x \neq 1, 2.$$

x இன் வலுக்களின் குணங்களை ஒப்பிடுகையில்

x^1 : $A+B = 0$ 5

x^0 : $-2A-B = 1$ 5

$A = -1, \quad B = 1$ 5

எனவே $$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$$ 10

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி

5 + 5 + 5 **40**

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$$= \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^t$$ 5

$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ for $t > 2$. 5

10

$$\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx$$ 5

$$= x\ln(x-k) - \int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx$$ 5

$$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C$$ 5

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி **15**

$$\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt$$ 5

$$= (t-2)\ln(t-2) - t - \left[(t-1)\ln(t-1) - t\right] + t\ln 2 + D$$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, இங்கு D ஒரு எதேச்சை மாறிலி

5 **10**

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$, எனும் சூத்திரத்தை பிரயோகிக்க

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\,dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad 5$$

10

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad 5$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad 5$$

25

---

16. $12x-5y-7=0,\ y=1$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகளை எழுதுக. இக்கோடுகளினால் ஆக்கப்படும் கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கி l எனக் கொள்வோம். நேர்கோடு l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P ஆனது l மீது உள்ள ஒரு புள்ளியெனக் கொள்வோம். P இன் ஆள்கூறுகளை $(3\lambda+1,\ 2\lambda+1)$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$.

$B \equiv (6,0)$ எனக் கொள்வோம். B, P ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S+\lambda U=0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $S \equiv x^2+y^2-7x-y+6,\ U \equiv -3x-2y+18$.

AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $S=0$ என **உய்த்தறிக.**

B இனூடாக, l இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $U=0$ எனக் காட்டுக.

எல்லா $\lambda \in \mathbb{R}$ இற்கும் சமன்பாடு $S+\lambda U=0$ ஐக் கொண்ட வட்டங்களின் மீது இருப்பதுவும் B இலிருந்து வேறுபட்டதுமான நிலைத்த புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S=0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் $S+\lambda U=0$ இனால் தரப்படும் வட்டத்திற்கு நிமிர்கோணமாக இருக்கத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$12x-5y-7=0$ and $y=1 \Rightarrow x=1,\quad y=1$

$\therefore\ A \equiv (1,1)$ 10

$\boxed{10}$

இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளுக்கு

$$\frac{12x-5y-7}{13} = \pm \frac{(y-1)}{1} \quad 10$$

$\Rightarrow\ 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7 = -13(y-1)$

$\Rightarrow\ 2x-3y+1 = 0$ or $3x+2y-5 = 0$ 5 + 5

$y=1,\ 2x-3y+1=0,$ என்பவற்றுக்கு இடையிலான கோணம் θ இற்கு

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right| = \frac{2}{3} < 1 \quad 5$$

$\therefore\ l:\ 2x-3y+1=0.$ 5

$\boxed{30}$

---

l இன் மீது புள்ளி (x, y) இற்கு

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \lambda \text{ (say)}$$

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \quad y = 2\lambda + 1.$ 10

$\boxed{10}$

$\therefore \; P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

எனவே $B \equiv (6, 0)$ and $P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1)$

BP ஐ விட்டமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-6) \; (x - (3\lambda + 1)) + (y-0) \; (y - (2\lambda + 1)) = 0$ 10

i.e. $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ 5

இது $S + \lambda U = 0$, எனும் வடிவில் உள்ளது இங்கு $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6, \;\; U \equiv -3x - 2y + 18$

5 5 $\boxed{25}$

$S = 0$ ஆக $\lambda = 0. \Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ 5

எனவே AB ஐ விட்டமாக உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு $S=O$ 5 $\boxed{10}$

---

l இன் சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆகையால் B இனூடாக செல்லும் l இற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$3x + 2y + \mu = 0, \; \mu$ துணியப்படவேண்டியது 10

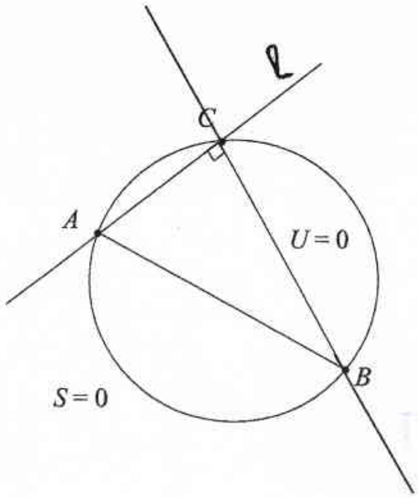
இச்செவ்வணில் B இருப்பதால் $3x + 2y + \mu = 0$, ஆகவே $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18.$ 5

எனவே தேவையான சமன்பாடு $3x + 2y - 18 = 0$ 5

i.e. $U = -3x - 2y + 18 = 0.$ $\boxed{20}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, இற்கு $S = 0, U = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளியினூடாக $S + \lambda U = 0$ செல்லும் 10

இவற்றில் ஒரு புள்ளி B மற்றய புள்ளி C ஆனது l , $U = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளி 10



C இன் ஆள்கூறுகளிற்கு

$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$

$l \equiv 2x - 3y + 1 = 0$,

$\Rightarrow x = 4 \quad , \quad y = 3$

$\therefore \; C \equiv (4, 3)$. 5

25

வட்டங்கள்

$S = 0 \quad , \quad S + \lambda U = 0$ ஆகியன நிமிர்கோணமானவை

$\Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$ 15

$\Leftrightarrow \quad 13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2.$ 5

20

---

17. (a) $\sin(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதி, $\sin(A-B)$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$ எனவும்

$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$ எனவும்

உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ இற்கு $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ ஐத் தீர்க்க.

(b) ஒரு முக்கோணி ABC இல் AC மீது புள்ளி D ஆனது $BD=DC$ ஆகவும் $AD=BC$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது. $B\hat{A}C=\alpha$ எனவும் $A\hat{C}B=\beta$ எனவும் கொள்வோம். உகந்த முக்கோணிகளுக்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+2\beta)$ எனக் காட்டுக.

$\alpha:\beta = 3:2$ எனின், மேலே (a) இல் உள்ள இறுதிப் பேறைப் பயன்படுத்தி $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக.

(c) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க. **இதிலிருந்து,** $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ எனக் காட்டுக.

(a) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— 1   5

எனவே $\sin(A-B) = \sin(A+(-B))$ 5

$= \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\therefore\ \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— 2   5 $\boxed{15}$

---

1 + 2 $\Rightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ 5

1 − 2 $\Rightarrow \sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ 5 $\boxed{10}$

$\boxed{0<\theta<\frac{\pi}{2}.}$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin\theta = \sin 7\theta$ 5

$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta+\theta) - \sin(6\theta-\theta) - \sin\theta = 0$ 5

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0<\theta<\frac{\pi}{2}, \sin\theta>0$

5   5

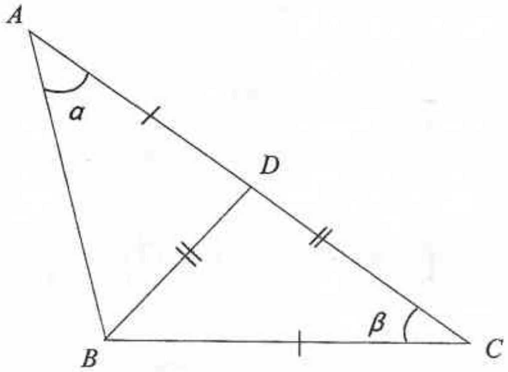
$$\Rightarrow \quad 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; n \in \mathbb{Z}. \qquad 5$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{18}, \; \frac{5\pi}{18}, \; \frac{7\pi}{18}, \; \left(\because \; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \qquad 5$$

30

(b)



அவதானிக்க

$C\hat{B}D = \beta, \; A\hat{D}B = 2\beta,$

$A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

சைன் விதியைப் பாவிப்போம்

முக்கோணி ABD, இற்கு

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D} \qquad 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + 2\beta)} \qquad 5 \qquad \text{——— (1)}$$

முக்கோணி BDC, இற்கு

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C} \qquad 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \qquad \text{——— (2)} \qquad 5$$

$\because \; BD = DC \;$, $\; AD = BC$, (1) , (2) இல் இருந்து

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} \qquad 5$$

$\Rightarrow\ 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ 5

40

$\alpha : \beta = 3:2$, எனின்

$2\sin\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} = \sin\frac{7\alpha}{3}$ 5

$\Rightarrow\ 2\sin 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ 5

$\Rightarrow\ \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{15\pi}{18}, \frac{21\pi}{18}$ 5

$\because BC = AD < AC$, α கூர்ங்கோணம் ஆகையால்

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$ 5

20

(c) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$, $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ என்க. $x \neq \pm 1$. இனை அவதானிக்க

$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$ 5

$\Leftrightarrow\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow\ \tan 2\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ 5

$\Leftrightarrow\ \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \cot\beta$ 5

$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x+1}$ 5

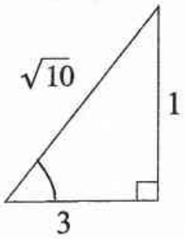
$\Leftrightarrow\ 2x = 1 - x \quad (\because x \neq \pm 1)$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{3}.$

25

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$. ஆகும்

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$ 5

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$ 5

10